Как подготовиться к единым национальным экзаменам 2015 года

МАТЕМАТИКА

Тбилиси

Содержание

Введение

В 2014 году в Грузии были проведены единые национальные экзамены. По результатам экзаменов произошло зачисление студентов в высшие учебные заведения. Одним из семи письменных экзаменов был экзамен по математике.

Целью экзамена по математике являлась проверка знания программного материала и способности его практического применения. Письменные работы проверялись централизованно по унифицированным критериям.

В сборнике представлен первый вариант экзаменационного теста и схема его оценок.

Тест по математике 2014 года единых национальных экзаменов состоял из 40 задач. Первые 30 задач были задачами с 4 вариантами ответов, из которых лишь один был верным. В этой части теста за каждую задачу ставился 1 балл или 0 баллов. За указание правильного ответа ставился 1 балл. Задачи с тридцать первой по сороковую включительно являлись задачами открытого типа. Для того, чтобы получить положительную оценку в этих задачах, недостаточно было указать лишь правильный ответ, было также необходимо изложить ход решения задачи. Из задач окрытого типа первые четыре задачи оценивались в 2 балла, следующие три задачи – в 3 балла, и последние три задачи – в 4 балла. Максимально возможное количество баллов за тест равнялось 59. Для сдачи экзамена абитуриент должен был набрать не менее 15 баллов (более 25% от максимально возможного количества баллов за тест).

В формате теста по математике 2015 года единых национальных экзаменов не планируется внесение изменений.

Надеемся, что сборник поможет абитуриентам лучше подготовиться к экзамену по математике.

Просим направлять ваши замечания и предложения по адресу:

Тбилиси, 0186
ул. Миндели, 9

Группа по математике Национального экзаменационного центра

Экзаменационная программа

Экзаменационная программа по математике составлена группой по математике Национального экзаменационного центра совместно с консультативным советом при центре, в состав которого входили представители высших учебных заведений и научно-исследовательских институтов.

Основой экзаменационной программы является национальный учебный план по математике.

В левом столбце экзаменационной программы (перечень вопросов) перечислены те математические понятия, определения и теоремы, знание которых требуется от абитуриента. Уточнение этих вопросов дано в правом столбце (требования и уточнения), где указано, какие знания должен иметь абитуриент по данному вопросу. В случае, если правый столбец пуст, от абитуриента требуется лишь знание данного понятия или теоремы и умение его применять.

Экзаменационная программа по математике 2013 года

Алгебра

№	Перечень вопросов	Требования и уточнения
1	Множества. Операции над множествами.	Пересечение множеств, их объединение, дополнение множества; диаграммы Венна.
2	Натуральные числа. Простые и составные числа. Кратное и делитель.	Арифметические действия над натуральными числами.
		Разложение числа на простые множители.
		Нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного нескольких чисел.
		Признаки делимости на 2, на 3, на 5, на 9 и на 10.
		Деление с остатком.
3	Целые числа.	Арифметические действия над целыми числами.
4	Рациональные числа. Простые и десятичные дроби.	Сравнение рациональных чисел и арифметические действия над рациональными числами. Округление целых чисел и десятичных дробей.
5	Иррациональные числа. Действительные числа.	Сравнение действительных чисел и арифметические действия над ними.
6	Числовая ось.	Координата точки. Изображение точки, соответствующей данному действительному числу на числовой оси.
7	Числовые интервалы.	Объединение и пересечение числовых интервалов.
8	Модуль числа.	Геометрический смысл модуля числа.
9	Представление натуральных чисел в разных позиционных системах.	Запись в двоичной позиционной системе чисел, заданных в десятичной, и наоборот.
10	Пропорция.	Основное свойство пропорции, нахождение неизвестного члена пропорции, деление числа в данной пропорции. Прямо пропорциональная и обратно пропорциональная зависимость между величинами.
11	Процент и часть числа.	Нахождение процента и части числа. Нахождение числа по данному проценту или части. Процентное отношение двух чисел.
12	Среднее арифметическое нескольких чисел.	
13	Степени с натуральным и целым показателем.	Возведение в степень произведения, отношения и степени. Произведение и отношение степеней с одинаковыми основаниями.
14	Одночлены и многочлены.	Сложение, вычитание и произведение многочленов.
15	Формулы сокращенного умножения.	$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$, $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.
16	Разложение многочлена на множители.	Вынесение общего множителя за скобки, способ группировки, разложение на множители с помощью формул сокращенного умножения.
17	Рациональное выражение.	Действия над рациональными выражениями.

18	Корень $n-$ной степени, арифметический корень.	Свойства арифметического корня.
19	Степень с рациональным показателем.	Свойства степени с рациональным показателем.
20	Алгебраическое выражение.	Преобразование алгебраического выражения и вычисление его значения.
21	Логарифм числа.	Основное логарифмическое тождество. Логарифм произведения, отношения и степени. Формула перехода от одного основания логарифма к другому основанию.
22	Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве.	Координаты точки. Изображение пары и тройки действительных чисел соответственно на координатной плоскости и в координатном пространстве. Формула для вычисления расстояния между двумя точками.
23	Функция. График функции. Композиция функций.	Область определения функции. Множество значений функции. Возрастание функции, ее убывание, четность, нечетность, периодичность. Наибольшее и наименьшее значения функции. Композиция функций. Функции, содержащие параметр.
		Задание функции посредством таблицы, формулы и графика. Вычисление значения функции для заданного значения аргумента.
24	Градусная и радианная мера угла.	Связь между радианной и градусной мерами угла.
25	Тригонометрические функции: синус, косинус и тангенс.	Значения синуса, косинуса и тангенса для аргументов: $0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$, знаки в каждой четверти, периодичность, четность, нечетность.
		Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.
		Формулы приведения.
		Формулы для вычисления значений тригонометрических функций для суммы и разности двух аргументов.
		Формулы для вычисления значения тригонометрических функций для двойного аргумента.
26	Уравнение, система уравнений.	Понятие решения и множеств решений уравнения и системы уравнений. Равносильные уравнения и системы уравнений. Уравнения и системы уравнений, содержащие параметр.
27	Линейные уравнения с одним неизвестным.	Решение линейного уравнения.
28	Квадратные уравнения с одним неизвестным.	Дискриминант.
		Решение квадратного уравнения.
		Теорема Виета. Обратная теорема Виета.
29	Квадратный трёхчлен.	Корни квадратного трёхчлена. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители.

30	Системы алгебраических уравнений с двумя неизвестными.	Решение таких систем алгебраических уравнений с двумя неизвестными, в которых одно уравнение линейно, а степень второго уравнения не более двух.
31	Задачи на составление уравнений и систем уравнений.	Решение задач с применением уравнений и систем уравнений.
32	Числовые неравенства.	Свойства числовых неравенств.
33	Неравенства, система неравенств.	Понятие решения и множества решений неравенства и системы неравенств. Представление решения неравенства с двумя неизвестными и системы неравенств на координатной плоскости. Равносильные неравенства.
34	Неравенства и системы неравенств с одним неизвестным.	Решение квадратных и рациональных неравенств и систем неравенств.
35	Линейные, квадратичные, степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические функции и их графики.	Область определения, множество значений, области возрастания и убывания функций: $y=kx+b$, $y=ax^2+bx+c$, $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{k}{x}$, $y=a^x$, $y=\log_a x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$.
36	Иррациональные уравнения.	Решение иррациональных уравнений, сводимых к линейным и квадратным.
37	Показательные уравнения и неравенства.	Решение показательных уравнений и неравенств.
38	Логарифмические уравнения и неравенства.	Решение логарифмических уравнений и неравенств.
39	Тригонометрические уравнения.	Решение уравнений вида $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$.
40	Числовая последовательность.	Нахождение членов последовательности по формуле $n-$ого члена.
41	Арифметическая прогрессия.	Формулы вычисления $n-$ого члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии.
42	Геометрическая прогрессия.	Формулы вычисления $n-$ого члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.
43	Элементы комбинаторики.	Число перестановок, число сочетаний, число размещений.

Геометрия

Планиметрия

№	Перечень вопросов	Требования и уточнения
1	Точка, прямая. Луч, отрезок, ломаная.	
2	Длина отрезка, длина ломаной.	
3	Угол, градусная мера угла, прямой, острый, тупой и развёрнутый угол.	
4	Биссектриса угла.	Свойство биссектрисы угла.
5	Серединный перпендикуляр отрезка.	Свойство серединного перпендикуляра отрезка.
6	Вертикальные и смежные углы.	Сумма смежных углов.
		Равенство вертикальных углов.
7	Параллельность прямых. Углы, полученные при пересечении двух прямых секущей.	Свойства углов, полученных при пересечении двух прямых секущей.
		Признаки параллельности прямых.
8	Угол между двумя прямыми. Перпендикулярность прямых. Перпендикуляр, наклонная и проекция. Расстояние от точки до прямой.	
9	Многоугольник и его элементы: сторона, вершина, угол, диагональ. Периметр многоугольника.	
10	Выпуклый многоугольник.	Сумма углов выпуклого многоугольника.
11	Треугольник и его элементы: сторона, угол, вершина, медиана, биссектриса, высота.	
12	Углы треугольника.	Сумма углов треугольника. Свойство внешнего угла треугольника.
13	Равенство треугольников.	Признаки равенства треугольников.
14	Неравенство треугольника.	
15	Соотношения между сторонами и углами треугольника.	В треугольнике против большей стороны (большего угла) лежит больший угол (большая сторона).
16	Медиана треугольника.	Свойство медиан треугольника (все три медианы треугольника пересекаются в одной точке и каждая из них точкой пересечения делится в отношении 2:1, считая от вершины).
17	Биссектриса треугольника.	Свойство биссектрисы треугольника (в треугольнике биссектриса угла делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам).
18	Частные случаи треугольников: прямоугольный, остроугольный, тупоугольный, равнобедренный, равносторонний	

19	Равнобедренный треугольник.	Свойства равнобедренного треугольника (углы при основании равнобедренного треугольника равны; в равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой).
20	Прямоугольный треугольник.	Признаки равенства прямоугольных треугольников.
		Свойство катета лежащего против угла в $30°$-ов.
		Тригонометрические соотношения между углами и сторонами в прямоугольном треугольнике.
		Соотношения между высотой, опущенной на гипотенузу, катетами, проекциями катетов и гипотенузой (например: $h^2 = a_c b_c$, $a^2 = ca_c$, $b^2 = cb_c$, $ch = ab$).
21	Теорема Пифагора	
22	Теорема Фалеса	
23	Средняя линия треугольника	Свойство средней линии треугольника.
24	Подобие треугольников	Признаки подобия треугольников.
		Отношение периметров и площадей подобных треугольников.
25	Теорема синусов	
26	Теорема косинусов	
27	Решение треугольника	
28	Параллелограмм	Свойства сторон и углов параллелограмма.
		Свойства диагоналей параллелограмма (точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии; сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон).
29	Ромб	Свойства диагоналей ромба.
30	Прямоугольник, квадрат	Равенство диагоналей прямоугольника.
31	Трапеция и её элементы: основание, боковая сторона, высота. Средняя линия трапеции.	Свойство средней линии трапеции.
32	Частные случаи трапеции: равнобедренная трапеция, прямоугольная трапеция.	
33	Равнобедренная трапеция.	Свойства равнобедренной трапеции.
34	Площадь плоской фигуры.	Площадь плоской фигуры равна сумме площадей ее составных частей.
35	Площадь квадрата, прямоугольника, треугольника, параллелограмма и трапеции.	Формулы площади квадрата, прямоугольника, треугольника, параллелограмма и трапеции.
36	Окружность, круг и их элементы: центр, радиус, диаметр, хорда, дуга, сектор, сегмент.	Градусная мера дуги.
		Число π.
		Формулы для вычисления длин окружности и дуги.
		Свойства диаметра, перпендикулярного к хорде.
37	Центральные и вписанные углы.	Соотношение между центральными и вписанными углами, опирающимися на одну и ту же дугу.
38	Секущая и касательная к	Свойство касательной, проведённой к окружности

	окружности.	из данной точки.
		Равенство двух касательных, проведённых к окружности из одной точки. Свойство пересекающихся хорд. Свойство секущей и касательной, проведенной к окружности из одной точки.
39	Окружности, вписанные в треугольник и описанные около треугольника.	Положение центра окружности, вписанной в треугольник. Положение центра окружности, описанной около треугольника.
		Формулы для вычисления радиусов описанной и вписанной окружностей треугольника (например: $R=\frac{abc}{4S}$, $R=\frac{a}{2\sin A}$, $r=\frac{2S}{a+b+c}$)
40	Правильные многоугольники. Вписанные и описанные окружности правильных многоугольников.	Соотношение между стороной правильного много-угольника и радиусами вписанной и описанной окружностей (например: $R=\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$, $r=\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$).
41	Площадь правильного много-угольника.	Формулы для вычисления площади правильного многоугольника с помощью радиусов вписанной в него, описанной около него окружностей и стороны многоугольника.
42	Площадь круга и кругового сектора.	Формулы для вычисления площадей круга и кругового сектора.
43	Геометрические преобразования на плоскости. Их композиции.	Центральная симметрия. Центр симметрии. Симметричность фигуры относительно точки.
		Осевая симметрия. Ось симметрии. Симметричность фигуры относительно оси.
		Параллельный перенос. Гомотетия. Поворот вокруг точки.

Стереометрия

№	Перечень вопросов	Требования и уточнения
1	Точка, прямая и плоскость в пространстве.	
2	Взаимное расположение прямых в пространстве.	Пересекающие, параллельные и скрещивающиеся прямые. Признаки параллельности прямых.
3	Ортогональная проекция точки, прямой и отрезка на плоскость.	
4	Перпендикулярность прямой и плоскости.	Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
5	Параллельность прямой и плоскости.	Признак параллельности прямой и плоскости.
6	Параллельные плоскости.	Признаки параллельности двух плоскостей.
7	Угол между плоскостями.	

8	Перпендикулярные плоскости.	Признак перпендикулярности двух плоскостей.
9	Перпендикуляр, наклонная и её проекция. Расстояние от точки до плоскости.	Теорема о трёх перпендикулярах.
10	Угол между прямой и плоскостью.	
11	Двугранный угол. Мера двугранного угла.	
12	Многогранник и его элементы (вершина, грань, ребро).	
13	Призма и её элементы (основание, боковая грань, боковое ребро, высота, диагональ). Диагональное сечение прямой призмы.	
14	Частные виды призмы (прямая призма, правильная призма, прямой параллелепипед, прямоугольный параллелепипед, куб).	
15	Пирамида и её элементы (вершина, боковое ребро, основание, боковая грань, высота).	
16	Правильная пирамида. Апофема.	
17	Цилиндр и его элементы (радиус, образующая, основание, высота, ось). Осевое сечение цилиндра.	
18	Конус и его элементы (вершина, основание, образующая, высота). Осевое сечение конуса.	
19	Шар, сфера и их элементы (центр, радиус, диаметр).	
20	Касательная плоскость к шару. Сечение шара плоскостью.	
21	Объёмы и площади поверхности тел.	Объем тела равен сумме объемов его составных частей.
		Вычисление площади боковой поверхности и объёма куба, прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы пирамиды, цилиндра и конуса.
		Вычисление площади поверхности сферы и объёма шара.
22	Развёртки куба, прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы, пирамиды, цилиндра и конуса.	Восстановление этих фигур по их развёрткам.
23	Векторы на плоскости и в пространстве.	Векторы и операции, определенные над ними: сложение, умножение на скаляр, скалярное произведение векторов, угол между двумя векторами, длина вектора.
		Выражение векторов и операций над ними в координатах.

Анализ данных, вероятность и статистика

№	Перечень вопросов	Требования и уточнеиия
1	Способы наглядного представления данных.	Точечная, линейная, столбиковая и круговая диаграммы. Масштаб. Шкала.
2	Числовые характеристики данных.	Частота, относительная частота, среднее, медиана, мода, размах, среднее квадратичное отклонение.
3	Элементы теории вероятностей.	Пространство элементарных событий, событие, операции над событиями, несовместные события, противоположное событие, независимые события. Классическое определение вероятности. Вычисление вероятности события.
		Вычисление вероятности суммы событий: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Вычисление вероятности противоположного события: $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$. Вычисление вероятности произведения независимых событий: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
		Геометрическая вероятность (на отрезке и плоской фигуре).

Единицы мер

№	Перечень вопросов	Требования и уточнения
1	Единицы длины.	Миллиметр (мм), сантиметр (см), дециметр (дм), метр (м), километр (км).
		Соотношение между единицами длины.
2	Единицы площади.	Квадратный миллиметр (мм^2), квадратный сантиметр (см^2), квадратный дециметр (дм^2), квадратный метр (м^2), гектар (га), квадратный километр (км^2).
		Соотношение между единицами площади.
3	Единицы объёма.	Кубический миллиметр (мм^3), кубический сантиметр (см^3), кубический дециметр (дм^3), литр (л), кубический метр (м^3).
		Соотношение между единицами объёма.
4	Единицы массы.	Грамм (г), килограмм (кг), центнер (ц), тонна (т).
		Соотношение между единицами массы.
5	Единицы времени.	Секунда (сек), минута (мин), час (ч).
		Соотношение между единицами времени.
6	Единицы скорости.	Метр в секунду (м/сек), метр в минуту (м/мин), километр в час (км/ч).
		Соотношение между единицами скорости.

Экзаменационные задания 2014 года

I вариант

Задача 1 **1 балл**

$\frac{3}{2}:\left(1-\frac{5}{4}\right)=$

а) -6 б) $-\frac{3}{4}$ в) $-\frac{1}{6}$ г) $-\frac{3}{8}$

Задача 2 **1 балл**

Какую цифру нужно вставить вместо $*$ в записи $354*67$ чтобы полученное число при делении на 9 в остатке давало 3?

а) 2 б) 3 в) 5 г) 7

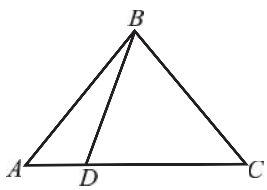
Задача 3 **1 балл**

Число a на 25% больше числа b. Во сколько раз число $\frac{1}{b}$ больше числа $\frac{1}{a}$?

а) $\frac{4}{5}$ -раз б) $1{,}5$ - раз в) $2{,}5$ - раз г) $\frac{5}{4}$ - раз

Задача 4 **1 балл**

На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка D так, что $\angle ABD = 20°$ и $\angle DBC = 60°$ (см. рисунок). Чему равен $\angle BDC$?



а) $50°$ б) $60°$ в) $80°$ г) $70°$

Задача 5 **1 балл**

Средняя линия трапеции на 2 меньше её большего основания. Найти среднюю линию трапеции, если меньшее основание трапеции равно 6-ти.

а) 7 б) 8 в) 9 г) 10

Задача 6 **1 балл**

Если натуральные числа a и b кратны 6, то наибольшим общим делителем этих чисел **не может** быть

а) 6 б) 12 в) 15 г) 18

Задача 7 **1 балл**

$\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2 =$

а) 3 б) 9 в) 12 г) $9-2\sqrt{3}$

Задача 8 **1 балл**

Фермер владеет двумя участками земли, площади которых относятся друг к другу как $3:5$. На $\frac{2}{3}$ части меньшего участка и на $\frac{3}{5}$ части большего участка фермер посадил яблони. На какой части суммарной площади обоих участков посадил фермер яблони?

а) $\frac{2}{5}$ б) $\frac{2}{15}$ в) $\frac{3}{5}$ г) $\frac{5}{8}$

Задача 9 **1 балл**

Пусть $a=2$ и $b=3$, тогда $\sqrt{\frac{a^3+b^3}{a+b}-ab} =$

а) 1 б) -1 в) $\sqrt{13}$ г) $\sqrt{5}$

Задача 10 **1 балл**

Какие высказывания из нижеперечисленных трех высказываний **всегда истинны**?

I) Если две различные плоскости α и β параллельны прямой m, то они взаимнопараллельны.

II) Если две различные плоскости α и β параллельны третьей плоскости γ, то они взаимнопараллельны.

III) Если две различные прямые m и n параллельны плоскости α, то они взаимнопараллельны.

а) только II

б) только I и II

в) только I

г) только II и III

Задача 11 **1 балл**

На сколько градусов повернётся минутная стрелка правильно идущих часов за 6 минут?

а) $24°$ б) $30°$ в) $36°$ г) $60°$

Задача 12 **1 балл**

Один рабочий за один день строит $\frac{1}{m}$ часть стены. За сколько дней построят всю стену k рабочих?

а) $\frac{1}{mk}$ б) $\frac{m}{k}$ в) $\frac{k}{m}$ г) mk

Задача 13 **1 балл**

Пусть A - множество всех делителей числа 35, а B - множество всех делителей числа 55, тогда сумма всех чисел, содержащихся в пересечении множеств A и B, равно

а) 1 б) 6 в) 13 г) 17

Задача 14 **1 балл**

Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если даны векторы $\overrightarrow{AC}(2;\ 6)$ и $\overrightarrow{BC}(-1;\ 2)$.

а) 4 б) 5 в) 6 г) 7

Задача 15 **1 балл**

В классе учатся 12 девочек и 10 мальчиков. Средний балл, полученный на экзамене по математике девочками равно 6, а мальчиками 7. Чему равен средний балл всех учеников класса?

а) $\frac{71}{11}$ б) $\frac{22}{13}$ в) $\frac{13}{2}$ г) $\frac{62}{11}$

Задача 16 **1 балл**

Найти множество решений неравенства $\frac{x+1}{1-x}>0$.

а) $(-1;\ 1)$ б) $(1;\ +\infty)$ в) $(-1;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$ г) $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$

Задача 17 **1 балл**

Какая из нижеперечисленных функций является нечетной для любой функции f, определенной на множестве всех действительных чисел?

а) $y=f\left(x^3\right)$ б) $y=f(x)+f(-x)$ в) $y=f(-x)$ г) $y=f(x)-f(-x)$

Задача 18 **1 балл**

Лия и Софо независимо друг от друга случайно выбирают по одному натуральному числу от 1 до 10 включительно (они могут выбрать и одинаковые числа). Чему равна вероятность того, что произведение выбранных чисел **не делится** на 3?

а) $0,21$ б) $0,49$ в) $0,51$ г) $0,9$

Задача 19 **1 балл**

Функция f определена равенством $f(x)=\sqrt{x}+2$. Найти $f\left(\frac{a}{4}\right)$, если $f(a)=6$.

а) -1 б) $\frac{3}{2}$ в) 2 г) 4

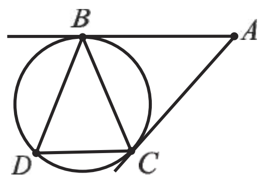
Задача 20 **1 балл**

В равнобедренной трапеции диагональ является также биссектрисой тупого угла. Чему равна площадь трапеции, если длины ее оснований равны 3 и 5?

а) $12,5$ б) $6\sqrt{15}$ в) 12 г) $8\sqrt{6}$

Задача 21 **1 балл**

Из точки A к окружности проведены касательные AB и AC (см. рисунок). Чему равна величина угла DBC, если $AB \parallel CD$ и $\angle BAC = 40°$?



а) $30°$ б) $35°$ в) $40°$ г) $50°$

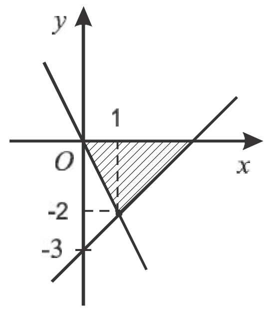
Задача 22 **1 балл**

Натуральные числа x и y удовлетворяют равенству $y+\frac{1}{x}=\frac{25}{3}$. Найти $x+y$.

а) 11 б) 15 в) 22 г) 28

Задача 23 1 балл

По данным приведённым на рисунке найдите систему неравенств, множество решений которой заштриховано на координатной плоскости.



а) $\begin{cases} y \le x-3 \\ 2y+x \ge 0 \\ y \le 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} y+3 \le x \\ 2x \ge y \\ x \ge 0 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \le y+3 \\ y+2x \ge 0 \\ y \le 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} y-x \ge -3 \\ y-2x \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$

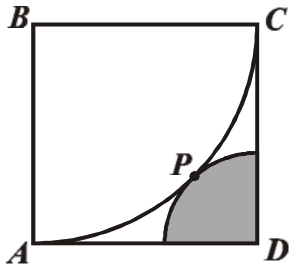
Задача 24 1 балл

В треугольнике ABC заданы $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$ и $AC + BC = 18\left(1+\sqrt{2}\right)$. Чему равна длина стороны BC?

а) 9 б) $9\sqrt{2}$ в) 18 г) $18\sqrt{2}$

Задача 25 1 балл

Из вершины B квадрата $ABCD$ как из центра описана окружность радиусом равным стороне квадрата. Эта окружность в точке P касается другой окружности с центром в вершине D (см. рисунок). Найти площадь фигуры закрашенной на рисунке, если сторона квадрата $ABCD$ равна 2 см.



а) $\left(4-2\pi\right)$ см^2 б) $\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ см^2 в) π см^2 г) 2π см^2

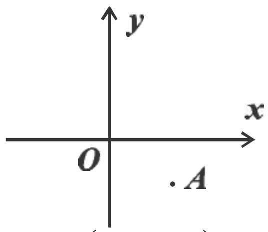
Задача 26 1 балл

$\log_3 45 =$

а) $1+\log_3 5$ б) $2+\log_3 5$ в) $3\log_3 5$ г) $2\log_3 5$

Задача 27 **1 балл**

Точка $A(4;-3)$, данная в прямоугольной системе координат Oxy, отображается в точку B поворотом на $90°$ по часовой стрелке вокруг точки O. Найти координаты точки B.



а) $(-5;-3)$ б) $(-4;-3)$ в) $(-3;-4)$ г) $(-3;-5)$

Задача 28 **1 балл**

Дана числовая последовательность, n-ый член которой задан формулой $a_n = 3n^2 - 40n + 10$. Найти номер **наименьшего** члена этой последовательности.

а) 6 б) 7 в) 8 г) 9

Задача 29 **1 балл**

Найти множество значений функции $f(x) = 3^{\cos x}$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

а) $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ б) $\left[1; \sqrt{3}\right]$ в) $(0; 3]$ г) $[1; 3]$

Задача 30 **1 балл**

Осевое сечение конуса - правильный треугольник. Чему равна площадь боковой поверхности конуса, если площадь его основания равна 16π?

а) $12\sqrt{3}\pi$ б) 18π в) 32π г) 48π

Задача 31 **2 балла**

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x - 2y = 3 \end{cases}.$$

Задача 32 **2 балла**

Автомобиль проходит путь между городами A и B за 3 часа. За сколько часов пройдёт он этот путь, если увеличит скорость на 20%?

Задача 33 **2 балла**

Площадь равнобедренного треугольника равна 7, а длина основания равна 4. Найти длину боковой стороны этого треугольника.

Задача 34 **2 балла**

Решить неравенство: $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5} < 4$.

Задача 35 **3 балла**

Разность арифметической прогрессии состоящей из положительных чисел равна $\frac{11}{6}$, а сумма всех членов прогрессии равна 132. Найти количество членов прогрессии, если её последний член в три раза больше первого члена.

Задача36 **3 балла**

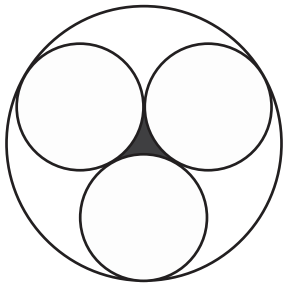
Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $5x - 2ax - 15 = 0$ меньше 3.

Задача 37 **3 балла**

Из точки A, лежащей на ребре двугранного угла, на одной из граней отложен отрезок AB, который составляет угол α с ребром двугранного угла. Найти синус угла, который составляет отрезок AB со второй гранью двугранного угла, если величина двугранного угла равна β.

Задача 38 **4 балла**

В окружность радиуса $2+\sqrt{3}$ вписаны три окружности имеющие равные радиусы так, что каждая окружность касается остальных трех. Найти площадь закрашенной фигуры, ограниченной тремя малыми окружностями (см. рисунок).



Задача 39 **4 балла**

Фирма собиралась купить определенный реактив за 2000 лари. Во время переговоров с поставщиком они договорились что фирма купит на 200 кг больше реактива, чем было запланировано и заплатит за каждый килограмм реактива на 3 лари меньше. В результате фирма заплатила за реактив 4000 лари. Сколько лари заплатила фирма за каждый килограмм реактива?

Задача 40 **4 балла**

Найти все значения параметра a для которых сумма всех корней уравнения

$$\sin\left(\sqrt{ax-x^2}\right)=0$$

равна 100.

Схемы оценки заданий I варианта

Задача 31 **2 балла**

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x - 2y = 3 \end{cases}.$$

Решение

Из первого уравнения получаем $x_1 = 2,\ x_2 = -2$. Из второго уравнения находим

$$y_1 = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2},\ y_2 = \frac{-2-3}{2} = -\frac{5}{2}.$$

Ответ: $x_1 = 2,\ y_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = -2,\ y_2 = -\frac{5}{2}.$

Этапы решения

а) Решить уравнение с одной переменной, или найти одну пару из решений системы уравнений.
б) Ответ.

Схема оценки

1 балл: а;
2 балла: а, б.

Задача 32 **2 балла**

Автомобиль проходит путь между городами A и B за 3 часа. За сколько часов пройдёт он этот путь, если увеличит скорость на 20%?

Решение

Пусть скорость автомобиля равна v км / ч, тогда расстояние от города A до города B будет равно $3v$ км. После увеличения скорости движения скорость автомобиля будет равна $1,2v$ км / ч, поэтому на прохождение расстояния между городами A и B автомобилю понадобится $\frac{3v}{1,2v} = 2,5$ часа.

Ответ: $2,5$ часа.

Этапы решения

а) Связать скорость автомобиля с расстоянием между городами (например, $S = 3v$) или связать скорость после увеличения с начальной скоростью (например, выражением $1,2v$) .

б) Ответ.

Схема оценки

1 балл: а.
2 балла: а, б.

Задача 33 **2 балла**

Площадь равнобедренного треугольника равна 7, а длина основания равна 4. Найти длину боковой стороны этого треугольника.

Решение

Площадь S данного треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot h$, где h - длина высоты, опущенной на основание, т.е $h = \frac{7 \cdot 2}{4} = \frac{7}{2}$. Эта высота делит данный треугольник на два прямоугольных треугольника. По теореме Пифагора длина ребра исходного треугольника будет равна $\sqrt{2^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{65}}{2}$.

Этапы решения

а) Вычисление высоты треугольника.

б) Ответ.

Схема оценки

1 балл: а.
2 балла: а, б.

Задача 34 **2 балла**

Решить неравенство: $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5} < 4$.

Решение

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5} < 2^2 \Leftrightarrow (2)^{-3x-5} < 2^2 \Leftrightarrow -3x-5<2 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{3}.$$

Ответ: $\left(-\frac{7}{3};\ +\infty\right)$.

Этапы решения

а) Сведение обеих частей уравнения к общему основанию или получение линейного неравенства с одной неизвестной.
б) Ответ.

Схема оценки

1 балл: а;
2 балла: а, б.

Задача 35 **3 балла**

Разность арифметической прогрессии, состоящей из положительных чисел, равна $\frac{11}{6}$, а сумма всех членов прогрессии равна 132. Найти количество членов прогрессии, если её последний член в три раза больше первого члена.

Решение

Пусть $a,\ a+d, ..., a+(n-1)d$ - рассматриваемая арифметическая прогрессия. Тогда $a+(n-1)d = 3a,\ (n-1)d = 2a$ и $S = \frac{a+a+(n-1)d}{2}n = dn(n-1) = \frac{11}{6}n(n-1) = 132$. Получаем уравнение $n(n-1) = 72$, откуда находим $n = 9$.

Ответ: 9.

Этапы решения

а) Установлена связь между первым (последним) членом арифметической прогрессии и количеством её членов.
б) Получено уравнение относительно количества членов прогрессии или её первого (последнего) члена.
в) Ответ.

Схема оценки

1 балл: а;
2 балла: а, б.
3 балла: а, б, в.

Задача 36 **3 балла**

Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $5x-2ax-15=0$ меньше 3.

Решение

Данное уравнение эквивалентно уравнению $(5-2a)x=15$. Это уравнение имеет решение, когда $a\neq\frac{5}{2}$. Тогда $x=\frac{15}{5-2a}$, и из условия задачи получаем:

$\frac{15}{5-2a}<3 \;\Leftrightarrow\; \frac{6a}{2\left(a-\frac{5}{2}\right)}>0$. Множеством решений последнего неравенства является

$a\in(-\infty;\,0)\cup\left(\frac{5}{2};\,+\infty\right)$.

Ответ: $a\in(-\infty;\,0)\cup\left(\frac{5}{2};\,+\infty\right)$.

Этапы решения

а) Решение уравнения выражено с помощью параметра.

б) Составлено необходимое неравенство (например, $\frac{15}{5-2a}<3$).

в) Ответ.

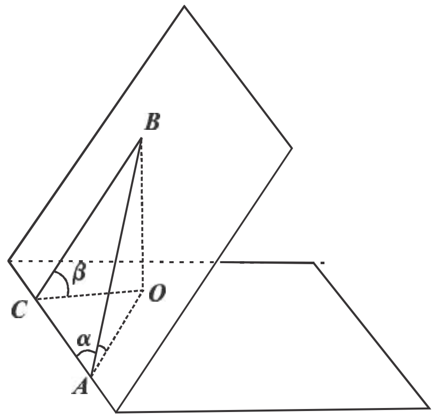
Схема оценки

1 балл: а;
2 балла: а, б.
3 балла: а, б, в.

Задача 37 **3 балла**

Из точки A, лежащей на ребре двугранного угла, на одной из граней отложен отрезок AB, который составляет угол α с ребром двугранного угла. Найти синус угла, который составляет отрезок AB со второй гранью двугранного угла, если величина двугранного угла равна β.

Решение



Опустим из точки B перпендикуляры BC и BO, соответственно, на ребро и на вторую грань двугранного угла. Тогда $\angle BAC = \alpha$ и $\angle BCO = \beta$.

Из прямоугольных треугольников BCA и BOC имеем $BC = AB \cdot \sin\alpha$ и $BO = BC \cdot \sin\beta$, а из прямоугольного треугольника BAO получаем $\sin\angle BAO = \dfrac{BO}{BA}$. С учетом предыдущих равенств $\sin\angle BAO = \dfrac{BO}{AB} = \dfrac{BC\cdot\sin\beta}{AB} = \sin\alpha\cdot\sin\beta$.

Ответ: $\sin\alpha\cdot\sin\beta$

Этапы решения

а) Построение чертежа с указанием углов α и β.

б) Получение равенств $BC = AB\cdot\sin\alpha$ или $BO = BC\cdot\sin\beta$ или $\sin\angle BAO = \dfrac{BO}{BA}$.

в) Связывание длин двух сторон треугольника ABO с помощью углов α и β.

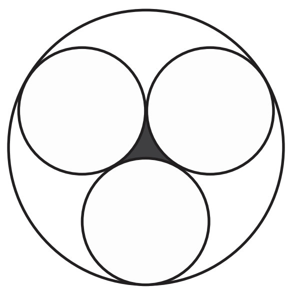
г) Ответ.

Схема оценки

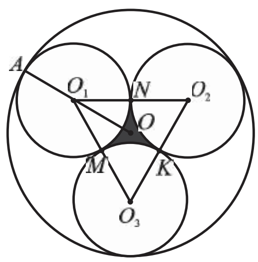
1 балл: а или б;
2 балла: а, в;
3 балла: в, г.

Задача 38 **4 балла**

В окружность радиуса $2+\sqrt{3}$ вписаны три окружности, имеющие равные радиусы так, что каждая окружность касается остальных трех. Найти площадь закрашенной фигуры, ограниченной тремя малыми окружностями (см. рисунок).



Решение



Обозначим искомую площадь через S. Тогда $S = S_{\triangle O_1O_2O_3} - 3S_{\text{сект},\,O_1MN}$. Центр O большой окружности совпадает с центром окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$, и

$2\cdot OO_1 = \dfrac{O_1O_2}{\sin 60^\circ} = \dfrac{2r}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{4r}{\sqrt{3}} \Rightarrow OO_1 = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$, где r - радиус малых окружностей. С другой стороны,

$OO_1 = OA - O_1A = 2 + \sqrt{3} - r$.

$2 + \sqrt{3} - r = \dfrac{2r}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right) r = \left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{3} \Rightarrow r = \sqrt{3}$, $S_{\triangle O_1O_2O_3} = \dfrac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} = r^2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$,

$S_{\text{сект},\, O_1MN} = \dfrac{\pi r^2}{6} = \dfrac{\pi}{2}$. $S = r^2\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2} r^2 = \left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}\right) r^2 = 3\sqrt{3} - \dfrac{3\pi}{2}$.

Ответ: $3\sqrt{3} - \dfrac{3\pi}{2}$.

Этапы решения

а) Площадь искомой фигуры представлена в виде комбинаций площадей круговых секторов и треугольника (например, $S = S_{\triangle O_1O_2O_3} - 3S_{\text{сект},\, O_1MN}$).

б) Отмечено, что треугольник $O_1O_2O_3$ - равносторонный со стороной $O_1O_2 = 2r$.

в) Получено уравнение, из которого можно найти радиус малой окружности (например, $S = S_{\triangle O_1O_2O_3} - 3S_{\text{сект},\, O_1MN}$).

г) Вычислена площадь треугольника $O_1O_2O_3$.

д) Вычислена площадь сектора O_1MN.

е) Ответ.

Схема оценки

1 балл: а или б.
2 балла: в.
3 балла: в, г; или в, д.
4 балла: в, г, д, е.

Задача 39 **4 балла**

Фирма собиралась купить определенный реактив за 2000 лари. Во время переговоров с поставщиком они договорились, что фирма купит на 200 кг больше реактива, чем было запланировано и заплатит за каждый килограмм реактива на 3 лари меньше. В результате фирма заплатила за реактив 4000 лари. Сколько лари заплатила фирма за каждый килограмм реактива?

Решение

Пусть исходная цена 1кг реактива была x лари, по этой цене фирма за 2000 лари планировала купить $\dfrac{2000}{x}$ кг реактива. После снижения цены стоимость 1кг реактива стала $x-3$ лари и за 4000 лари фирма купила $\dfrac{4000}{x-3}$ кг реактива. Так как это количество на 200 кг больше запланированного, то

$$\frac{4000}{x-3} - \frac{2000}{x} = 200.$$

Решим уравнение:

$$\frac{20}{x-3}-\frac{10}{x}=1, \quad x^2-13x-30=0, \quad x_1=-2,\ x_2=15, \quad x-3=12.$$

Ответ: 12 лари.

Этапы решения

а) Введение неизвестной переменной и связывание с её помощью цены 1кг реактива и количества купленного реактива (например, выражением $\frac{2000}{x}$ или $\frac{4000}{x-3}$).

б) Составление уравнения с одной неизвестной.
в) Сведение к квадратному уравнению.
г) Ответ.

Схема оценки

1 балл: а.
2 балла: а, б.
3 балла: а, б, в.
4 балла: а, б, в, г.

Задача 40 **4 балла**

Найти все значения параметра a, для которых сумма всех корней уравнения

$$\sin\left(\sqrt{ax-x^2}\right)=0$$

равна 100.

Решение

$$\sqrt{ax-x^2}=\pi k,\ k\ge 0, \qquad ax-x^2=\pi^2k^2,\ k=0,1,..., \qquad x^2-ax+\pi^2k^2=0,\ k=0,1,...$$

Это уравнение имеет решение для всех целых неотрицательных k, для которых дискриминант $D=a^2-4\pi^2k^2\ge 0$, т.е.

$$2\pi k\le |a|. \tag{1}$$

Если исходное уравнение для некоторого значения k имеет положительный дискриминант, то в силу теоремы Виетта сумма соответствующих решений равна a, а если дискриминант равен нулю, то соответствующее решение равно $\frac{a}{2}$, поэтому сумма всех решений равно $S=(n+1)a$ или $S=\left(n+\frac{1}{2}\right)a$, где n - наибольшее значение k, для которого $D=a^2-4\pi^2k^2\ge 0$. Из приведенных равенств следует, что a является рациональным числом и, поэтому $a\ne 2\pi k$, $D\ne 0$ и $S=(n+1)a.$ В силу (1) n -наибольшее число, для которого $2\pi n\le\frac{S}{(n+1)}$. Решим неравенство $2\pi n(n+1)\le S\Rightarrow n=3$. Таким образом, уравнение имеет 8 решений ($k = 0,1,2,3$), сумма которых равна $4a$, поэтому $4a = 100$, $a = 25$.

Ответ: $a = 25$.

Этапы решения

а) Получено квадратное уравнение $ax - x^2 = \pi^2 k^2$.

б) Написано условие разрешимости полученного квадратного уравнения ($a^2 - 4\pi^2 k^2 \geq 0$) или указано, что если при некотором k дискриминант положителен, то сумма решений, соответствующих этому k, равна a.

в) Получено неравенство $2\pi n(n+1) \leq 100$, где n - наибольшее значение k, для которого $D \geq 0$, или установлено, что уравнение имеет 8 решений.

г) Ответ.

Схема оценки

1 балл: а.
2 балла: а, б.
3 балла: б, в.
4 балла: б, в, г.

Ответы

1	а
2	в
3	г
4	г
5	б
6	в
7	а
8	г
9	а
10	а
11	в
12	б
13	б
14	б
15	а
16	а
17	г
18	б
19	г
20	г
21	в
22	а
23	в
24	в
25	б
26	б
27	в
28	б
29	г
30	в
31	$x_1 = 2,\ y_1 = -\frac{1}{2};\ \ x_2 = -2,\ y_2 = -\frac{5}{2}.$
32	$2{,}5$ часа
33	$\frac{\sqrt{65}}{2}$
34	$\left(-\frac{7}{3};\ +\infty\right)$
35	9
36	$a \in (-\infty;\ 0) \cup \left(\frac{5}{2};\ +\infty\right)$

37	$\sin\alpha \cdot \sin\beta$
38	$3\sqrt{3}-\dfrac{3\pi}{2}$
39	12 лари
40	$a=25$

Лист ответов

На экзаменах абитуриентам раздают тетради тестовых заданий и листы ответов. В тетради тестовых заданий даны условия задач и оставлено место для черновой работы, которое абитуриент может использовать по своему усмотрению. **Эта часть работы абитуриента не будет оцениваться.**

Правильные ответы и решения абитуриент должен перенести в лист ответов. Решение каждой из задач с тридцать первой по сороковую включительно абитуриент должен перенести в лист ответов на то место, которое выделено именно для этой задачи. **Для каждой из задач должен быть четко указан ход решения.**