

**Как подготовиться к единым национальным экзаменам
2013 года**

МАТЕМАТИКА

Тбилиси

Содержание

Введение	3
Экзаменационная программа	5
Алгебра	5
Планиметрия	8
Стереометрия	10
Анализ данных, вероятность и статистика	12
Единицы меры	12
Экзаменационные задания 2012 года (I вариант)-----	13
Схемы оценки заданий I варианта	25
Ответы	32
Лист ответов	33

Введение

В 2012 году в Грузии были проведены единые национальные экзамены. По результатам экзаменов произошло зачисление студентов в высшие учебные заведения. Одним из семи письменных экзаменов был экзамен по математике.

Целью экзамена по математике являлась проверка знания программного материала и способности его практического применения. Письменные работы проверялись централизованно по унифицированным критериям.

В сборнике представлен первый вариант экзаменационного теста и схема его оценок.

Тест по математике 2012 года единых национальных экзаменов состоял из 40 задач. Первые 30 задач были задачами с 4 вариантами ответов, из которых лишь один был верным. В этой части теста за каждую задачу ставился 1 балл или 0 баллов. За указание правильного ответа ставился 1 балл. Задачи с тридцать первой по сороковую являлись задачами открытого типа. Для того, чтобы получить положительную оценку в этих задачах, недостаточно было указать лишь правильный ответ, было также необходимо изложить ход решения задачи. Из задач открытого типа первые четыре задачи оценивались в 2 балла, следующие три задачи – в 3 балла, и последние три задачи – в 4 балла. Максимально возможное количество баллов за тест равнялось 59. Для сдачи экзамена абитуриент должен был набрать не менее 15 баллов (более 25% от максимально возможного количества баллов за тест).

В формате теста по математике 2012 года единых национальных экзаменов не планируется внесение изменений.

Надеемся, что сборник поможет абитуриентам лучше подготовиться к экзамену по математике.

Просим направлять ваши замечания и предложения по адресу:

**Тбилиси, 0186
ул. Миндели, 9**

Группа по математике Национального экзаменационного центра

Экзаменационная программа

Экзаменационная программа по математике составлена группой по математике Национального экзаменационного центра совместно с консультативным советом при центре, в состав которого входили представители высших учебных заведений и научно-исследовательских институтов.

Основой экзаменационной программы является национальный учебный план по математике.

В левом столбце экзаменационной программы (перечень вопросов) перечислены те математические понятия, определения и теоремы, знание которых требуется от абитуриента. Уточнение этих вопросов дано в правом столбце (требования и уточнения), где указано, какие знания должен иметь абитуриент по данному вопросу. В случае, если правый столбец пуст, от абитуриента требуется лишь знание данного понятия или теоремы и умение его применять.

Экзаменационная программа по математике 2013 года

Алгебра

№	Перечень вопросов	Требования и уточнения
1	Множества. Операции над множествами.	Пересечение множеств, их объединение, дополнение множества; диаграммы Венна.
2	Натуральные числа. Простые и составные числа. Кратное и делитель.	Арифметические действия над натуральными числами.
		Разложение числа на простые множители.
		Нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного нескольких чисел.
		Признаки делимости на 2, на 3, на 5, на 9 и на 10.
		Деление с остатком.
3	Целые числа.	Арифметические действия над целыми числами.
4	Рациональные числа. Простые и десятичные дроби.	Сравнение рациональных чисел и арифметические действия над рациональными числами. Округление целых чисел и десятичных дробей.
5	Иррациональные числа. Действительные числа.	Сравнение действительных чисел и арифметические действия над ними.
6	Числовая ось.	Координата точки. Изображение точки, соответствующей данному действительному числу на числовой оси.
7	Числовые интервалы.	Объединение и пересечение числовых интервалов.
8	Модуль числа.	Геометрический смысл модуля числа.
9	Представление натуральных чисел в разных позиционных системах.	Запись в двоичной позиционной системе чисел, заданных в десятичной, и наоборот.
10	Пропорция.	Основное свойство пропорции, нахождение неизвестного члена пропорции, деление числа в данной пропорции. Прямо пропорциональная и обратно пропорциональная зависимость между величинами.
11	Процент и часть числа.	Нахождение процента и части числа. Нахождение числа по данному проценту или части. Процентное отношение двух чисел.
12	Среднее арифметическое нескольких чисел.	
13	Степени с натуральным и целым показателем.	Возведение в степень произведения, отношения и степени. Произведение и отношение степеней с одинаковыми основаниями.
14	Одночлены и многочлены.	Сложение, вычитание и произведение многочленов.
15	Формулы сокращенного умножения.	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$ $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3,$ $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$
16	Разложение многочлена на множители.	Вынесение общего множителя за скобки, способ группировки, разложение на множители с помощью формул сокращенного умножения.

17	Рациональное выражение.	Действия над рациональными выражениями.
18	Корень n -ной степени, арифметический корень.	Свойства арифметического корня.
19	Степень с рациональным показателем.	Свойства степени с рациональным показателем.
20	Алгебраическое выражение.	Преобразование алгебраического выражения и вычисление его значения.
21	Логарифм числа.	Основное логарифмическое тождество. Логарифм произведения, отношения и степени. Формула перехода от одного основания логарифма к другому основанию.
22	Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве.	Координаты точки. Изображение пары и тройки действительных чисел соответственно на координатной плоскости и в координатном пространстве. Формула для вычисления расстояния между двумя точками.
23	Функция. График функции. Композиция функций.	Область определения функции. Множество значений функции. Возрастание функции, ее убывание, четность, нечетность, периодичность. Наибольшее и наименьшее значения функции. Композиция функций. Функции, содержащие параметр. Задание функции посредством таблицы, формулы и графика. Вычисление значения функции для заданного значения аргумента.
24	Градусная и радианная мера угла.	Связь между радианной и градусной мерами угла.
25	Тригонометрические функции: синус, косинус и тангенс.	Значения синуса, косинуса и тангенса для аргументов: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, знаки в каждой четверти, периодичность, четность, нечетность. Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Формулы приведения. Формулы для вычисления значений тригонометрических функций для суммы и разности двух аргументов. Формулы для вычисления значения тригонометрических функций для двойного аргумента.
26	Уравнение, система уравнений.	Понятие решения и множеств решений уравнения и системы уравнений. Равносильные уравнения и системы уравнений. Уравнения и системы уравнений, содержащие параметр.
27	Линейные уравнения с одним неизвестным.	Решение линейного уравнения.
28	Квадратные уравнения с одним неизвестным.	Дискриминант. Решение квадратного уравнения. Теорема Виета. Обратная теорема Виета.
29	Квадратный трёхчлен.	Корни квадратного трёхчлена. Разложение квадратного трёхчлена на линейные

		множители.
30	Системы алгебраических уравнений с двумя неизвестными.	Решение таких систем алгебраических уравнений с двумя неизвестными, в которых одно уравнение линейно, а степень второго уравнения не более двух.
31	Задачи на составление уравнений и систем уравнений.	Решение задач с применением уравнений и систем уравнений.
32	Числовые неравенства.	Свойства числовых неравенств.
33	Неравенства, система неравенств.	Понятие решения и множества решений неравенства и системы неравенств. Представление решения неравенства с двумя неизвестными и системы неравенств на координатной плоскости. Равносильные неравенства.
34	Неравенства и системы неравенств с одним неизвестным.	Решение квадратных и рациональных неравенств и систем неравенств.
35	Линейные, квадратичные, степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические функции и их графики.	Область определения, множество значений, области возрастания и убывания функций: $y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{k}{x}$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$.
36	Иррациональные уравнения.	Решение иррациональных уравнений, сводимых к линейным и квадратным.
37	Показательные уравнения и неравенства.	Решение показательных уравнений и неравенств.
38	Логарифмические уравнения и неравенства.	Решение логарифмических уравнений и неравенств.
39	Тригонометрические уравнения.	Решение уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.
40	Числовая последовательность.	Нахождение членов последовательности по формуле n -ого члена.
41	Арифметическая прогрессия.	Формулы вычисления n -ого члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии.
42	Геометрическая прогрессия.	Формулы вычисления n -ого члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.
43	Элементы комбинаторики.	Число перестановок, число сочетаний, число размещений.

Геометрия

Планиметрия

№	Перечень вопросов	Требования и уточнения
1	Точка, прямая. Луч, отрезок, ломаная.	
2	Длина отрезка, длина ломаной.	
3	Угол, градусная мера угла, прямой, острый, тупой и развёрнутый угол.	
4	Биссектриса угла.	Свойство биссектрисы угла.
5	Серединный перпендикуляр отрезка.	Свойство серединного перпендикуляра отрезка.
6	Вертикальные и смежные углы.	Сумма смежных углов. Равенство вертикальных углов.
7	Параллельность прямых. Углы, полученные при пересечении двух прямых секущей.	Свойства углов, полученных при пересечении двух прямых секущей. Признаки параллельности прямых.
8	Угол между двумя прямыми. Перпендикулярность прямых. Перпендикуляр, наклонная и проекция. Расстояние от точки до прямой.	
9	Многоугольник и его элементы: сторона, вершина, угол, диагональ. Периметр многоугольника.	
10	Выпуклый многоугольник.	Сумма углов выпуклого многоугольника.
11	Треугольник и его элементы: сторона, угол, вершина, медиана, биссектриса, высота.	
12	Углы треугольника.	Сумма углов треугольника. Свойство внешнего угла треугольника.
13	Равенство треугольников.	Признаки равенства треугольников.
14	Неравенство треугольника.	
15	Соотношения между сторонами и углами треугольника.	В треугольнике против большей стороны (большого угла) лежит больший угол (большая сторона).
16	Медиана треугольника.	Свойство медиан треугольника (все три медианы треугольника пересекаются в одной точке и каждая из них точкой пересечения делится в отношении 2:1, считая от вершины).
17	Биссектриса треугольника.	Свойство биссектрисы треугольника (в треугольнике биссектриса угла делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам).
18	Частные случаи треугольников: прямоугольный, остроугольный, тупоугольный,	

	равнобедренный, равносторонний	
19	Равнобедренный треугольник.	Свойства равнобедренного треугольника (углы при основании равнобедренного треугольника равны; в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой).
20	Прямоугольный треугольник.	Признаки равенства прямоугольных треугольников. Свойство катета лежащего против угла в 30° -ов. Тригонометрические соотношения между углами и сторонами в прямоугольном треугольнике. Соотношения между высотой, опущенной на гипотенузу, катетами, проекциями катетов и гипотенузой (например: $h^2 = a_c b_c$, $a^2 = ca_c$, $b^2 = cb_c$, $ch = ab$).
21	Теорема Пифагора	
22	Теорема Фалеса	
23	Средняя линия треугольника	Свойство средней линии треугольника.
24	Подобие треугольников	Признаки подобия треугольников. Отношение периметров и площадей подобных треугольников.
25	Теорема синусов	
26	Теорема косинусов	
27	Решение треугольника	
28	Параллелограмм	Свойства сторон и углов параллелограмма. Свойства диагоналей параллелограмма (точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии; сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон).
29	Ромб	Свойства диагоналей ромба.
30	Прямоугольник, квадрат	Равенство диагоналей прямоугольника.
31	Трапеция и её элементы: основание, боковая сторона, высота. Средняя линия трапеции.	Свойство средней линии трапеции.
32	Частные случаи трапеции: равнобедренная трапеция, прямоугольная трапеция.	
33	Равнобедренная трапеция.	Свойства равнобедренной трапеции.
34	Площадь плоской фигуры.	Площадь плоской фигуры равна сумме площадей ее составных частей.
35	Площадь квадрата, прямоугольника, треугольника, параллелограмма и трапеции.	Формулы площади квадрата, прямоугольника, треугольника, параллелограмма и трапеции.
36	Окружность, круг и их элементы: центр, радиус, диаметр, хорда, дуга, сектор, сегмент.	Градусная мера дуги. Число π . Формулы для вычисления длин окружности и дуги. Свойства диаметра, перпендикулярного к хорде.
37	Центральные и вписанные	Соотношение между центральными и вписанными

	углы.	углами, опирающимися на одну и ту же дугу.
38	Секущая и касательная к окружности.	Свойство касательной, проведённой к окружности из данной точки. Равенство двух касательных, проведённых к окружности из одной точки. Свойство пересекающихся хорд. Свойство секущей и касательной, проведённой к окружности из одной точки.
39	Окружности, вписанные в треугольник и описанные около треугольника.	Положение центра окружности, вписанной в треугольник. Положение центра окружности, описанной около треугольника. Формулы для вычисления радиусов описанной и вписанной окружностей треугольника (: $R = \frac{abc}{4S}$, $R = \frac{a}{2 \sin A}$, $r = \frac{2S}{a+b+c}$)
40	Правильные многоугольники. Вписанные и описанные окружности правильных многоугольников.	Соотношение между стороной правильного многоугольника и радиусами вписанной и описанной окружностей (например: $R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$, $r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$).
41	Площадь правильного многоугольника.	Формулы для вычисления площади правильного многоугольника с помощью радиусов вписанной в него, описанной около него окружностей и стороны многоугольника.
42	Площадь круга и кругового сектора.	Формулы для вычисления площадей круга и кругового сектора.
43	Геометрические преобразования на плоскости. Их композиции.	Центральная симметрия. Центр симметрии. Симметричность фигуры относительно точки. Осевая симметрия. Ось симметрии. Симметричность фигуры относительно оси. Параллельный перенос. Гомотетия. Поворот вокруг точки.

Стереометрия

№	Перечень вопросов	Требования и уточнения
1	Точка, прямая и плоскость в пространстве.	
2	Взаимное расположение прямых в пространстве.	Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые. Признаки параллельности прямых.
3	Ортогональная проекция точки, прямой и отрезка на плоскость.	
4	Перпендикулярность прямой и плоскости.	Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
5	Параллельность прямой и плоскости.	Признак параллельности прямой и плоскости.

6	Параллельные плоскости.	Признаки параллельности двух плоскостей.
7	Угол между плоскостями.	
8	Перпендикулярные плоскости.	Признак перпендикулярности двух плоскостей.
9	Перпендикуляр, наклонная и её проекция. Расстояние от точки до плоскости.	Теорема о трёх перпендикулярах.
10	Угол между прямой и плоскостью.	
11	Двугранный угол. Мера двугранного угла.	
12	Многогранник и его элементы (вершина, грань, ребро).	
13	Призма и её элементы (основание, боковая грань, боковое ребро, высота, диагональ). Диагональное сечение прямой призмы.	
14	Частные виды призмы (прямая призма, правильная призма, прямой параллелепипед, прямоугольный параллелепипед, куб).	
15	Пирамида и её элементы (вершина, боковое ребро, основание, боковая грань, высота).	
16	Правильная пирамида. Апофема.	
17	Цилиндр и его элементы (радиус, образующая, основание, высота, ось). Осевое сечение цилиндра.	
18	Конус и его элементы (вершина, основание, образующая, высота). Осевое сечение конуса.	
19	Шар, сфера и их элементы (центр, радиус, диаметр).	
20	Касательная плоскость к шару. Сечение шара плоскостью.	
21	Объёмы и площади поверхности тел.	Объём тела равен сумме объёмов его составных частей.
		Вычисление площади боковой поверхности и объёма куба, прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы пирамиды, цилиндра и конуса.
		Вычисление площади поверхности сферы и объёма шара.
22	Развёртки куба, прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы, пирамиды, цилиндра и конуса.	Восстановление этих фигур по их развёрткам.
23	Векторы на плоскости и в пространстве.	Векторы и операции, определенные над ними: сложение, умножение на скаляр, скалярное произведение векторов, угол между двумя векторами, длина вектора.
		Выражение векторов и операций над ними в координатах.

Анализ данных, вероятность и статистика

№	Перечень вопросов	Требования и уточнения
1	Способы наглядного представления данных.	Точечная, линейная, столбиковая и круговая диаграммы. Масштаб. Шкала.
2	Числовые характеристики данных.	Частота, относительная частота, среднее, медиана, мода, размах, среднее квадратичное отклонение.
3	Элементы теории вероятностей.	<p>Пространство элементарных событий, событие, операции над событиями, несовместные события, противоположное событие, независимые события.</p> <p>Классическое определение вероятности. Вычисление вероятности события.</p> <p>Вычисление вероятности суммы событий: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.</p> <p>Вычисление вероятности противоположного события: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.</p> <p>Вычисление вероятности произведения независимых событий: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.</p> <p>Геометрическая вероятность (на отрезке и плоской фигуре).</p>

Единицы мер

№	Перечень вопросов	Требования и уточнения
1	Единицы длины.	<p>Миллиметр (мм), сантиметр (см), дециметр (дм), метр (м), километр (км).</p> <p>Соотношение между единицами длины.</p>
2	Единицы площади.	<p>Квадратный миллиметр (мм²), квадратный сантиметр (см²), квадратный дециметр (дм²), квадратный метр (м²), гектар (га), квадратный километр (км²).</p> <p>Соотношение между единицами площади.</p>
3	Единицы объёма.	<p>Кубический миллиметр (мм³), кубический сантиметр (см³), кубический дециметр (дм³), литр (л), кубический метр (м³).</p> <p>Соотношение между единицами объёма.</p>
4	Единицы массы.	<p>Грамм (г), килограмм (кг), центнер (ц), тонна (т).</p> <p>Соотношение между единицами массы.</p>
5	Единицы времени.	<p>Секунда (сек), минута (мин), час (ч).</p> <p>Соотношение между единицами времени.</p>
6	Единицы скорости.	<p>Метр в секунду (м/сек), метр в минуту (м/мин), километр в час (км/ч).</p> <p>Соотношение между единицами скорости.</p>

Экзаменационные задания 2012 года

I вариант

Задача 1

1 балл

Найти значение выражения $p^2 - 2pq + q^2$ при $p = 23$ и $q = 3$.

а) 200

б) 300

в) 400

г) 500

Задача 2

1 балл

Чему равно n , если $3,56 \cdot 10^n = 3560$?

а) 2

б) 3

в) 4

г) 5

Задача 3

1 балл

Сплав золота и серебра содержит 1,6г золота и 2,4г серебра. Сколько процентов серебра содержит сплав?

а) 25%

б) 48%

в) 60%

г) 64%

Задача 4**1 балл**

В треугольнике ABC найти длину отрезка, соединяющего середины сторон AB и AC , если $BC = 3$.

а) 1

б) 1,5

в) 2,5

г) 3

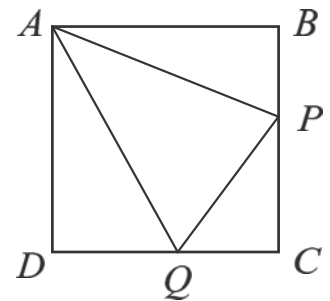
Задача 5**1 балл**

В равнобедренной трапеции отношение наибольшего и наименьшего углов равно 3. Чему равна величина наименьшего угла этой трапеции?

а) $22,5^\circ$ б) 30° в) 45° г) 60°

Задача 6**1 балл**

Сторона квадрата $ABCD$ равна 8. В него вписан треугольник APQ так, что точки P и Q расположены на сторонах BC и CD , соответственно. Найти длину стороны PQ , если $BP = 3$, $DQ = 4$.

а) $\sqrt{30}$

б) 6

в) 7

г) $\sqrt{41}$

Задача 7**1 балл**

Найти наибольшее натуральное число, которое меньше $\sqrt[3]{52}$.

а) 2

б) 3

в) 4

г) 5

Задача 8**1 балл**

Какое из нижеперечисленных равенств истинно для всех таких ненулевых чисел a , b , c и d , для которых $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$?

а) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

б) $\frac{a}{d} = \frac{c}{b}$

в) $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$

г) $\frac{abc}{d} = \frac{bcd}{a}$

Задача 9**1 балл**

Найти пересечение множеств A и B , если $A = \{-3; -1; 0; 2; 5; 9\}$ и $B = \{-10; -1; 0; 5; 11\}$.

а) \emptyset б) $\{-1; 0; 5\}$ в) $\{-3; -1; 0; 2; 5; 9\}$ г) $\{-10; -3; -1; 0; 2; 5; 9; 11\}$

Задача 10**1 балл**

Найти k , если квадратный трехчлен $x^2 + kx + 5$ представлен в виде произведения $(x+1)(x+c)$, где k и c - неизвестные числа.

а) 0

б) 5

в) 6

г) 2

Задача 11**1 балл**

Длины диагоналей параллелограмма равны 6 и 12. Одна из диагоналей делит угол параллелограмма пополам. Найти периметр этого параллелограмма.

а) $24\sqrt{3}$ б) $12\sqrt{5}$

в) 36

г) $16\sqrt{2}$

Задача 12**1 балл**

Сколько стоит проезд 10-ти километров на такси, если проезд первого $\frac{1}{4}$ км стоит 1 лари, а стоимость проезда каждого последующего $\frac{1}{4}$ км равна 20 тетри?

а) 8 лари

б) 8 лари и 80 тетри

в) 9 лари

г) 9 лари и 60 тетри

Задача 13**1 балл**

Во сколько раз площадь боковой поверхности цилиндра больше площади осевого сечения этого цилиндра?

а) 4

б) 2

в) $\frac{1}{\pi}$ г) π

Задача 14**1 балл**

При каком значении параметра a уравнения

$$\frac{x+2}{2} = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \frac{1}{8x-5} = \frac{1}{5x+a}$$

имеют одинаковые множества решений?

а) 3

б) -3

в) 9

г) -9

Задача 15**1 балл**

Натуральному числу a справа приписали цифру 2. Чему равно полученное число?

а) $\frac{a+2}{10}$ б) $10a-2$ в) $a+2$ г) $10a+2$

Задача 16**1 балл**

Какое из нижеперечисленных неравенств ложно, если $a < b < c$, $b < 0$ и $a \cdot b \cdot c > 0$?

а) $c > a + b$

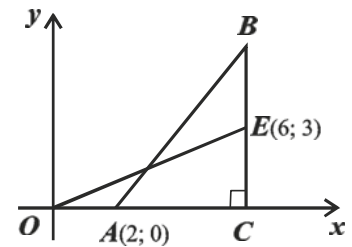
б) $ab < bc$

в) $ac < bc$

г) $ac < ab$

Задача 17**1 балл**

На рисунке изображена прямоугольная система координат. Опираясь на рисунок, найти координаты точки B , если точка E находится на отрезке BC и $\angle BAC = \angle OEC$.



а) $(3; 6)$

б) $(6; 6)$

в) $(6; 8)$

г) $(6; 9)$

Задача 18**1 балл**

Вероятности того, что Георгий и Лия сдадут экзамен по математике, равны соответственно 0,3 и 0,4. Известно, что эти события независимые. Чему равна вероятность того, что хотя бы один из них сдаст экзамен?

а) 0,58

б) 0,28

в) 0,5

г) 0,7

Задача 19**1 балл**

Какая из нижеперечисленных функций является четной?

а) $y = x^3$

б) $y = x^2 + x + 5$

в) $y = \log_2 x$

г) $y = |x| - 3$

Задача 20**1 балл**

Диагонали параллелограмма равны 10 и 12, а угол между ними равен 30° . Найти длину большей стороны параллелограмма.

а) $\sqrt{61}$

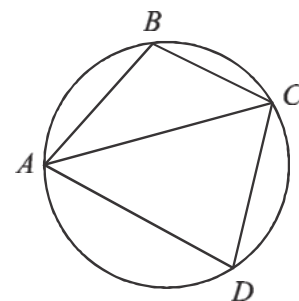
б) $\sqrt{31}$

в) $\sqrt{61 - 15\sqrt{6}}$

г) $\sqrt{61 + 30\sqrt{3}}$

Задача 21**1 балл**

Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности (см. рисунок). Найти градусную меру угла BCA , если известно, что $\angle BAC = 50^\circ$ и $\angle ADC = 80^\circ$.



а) 15°

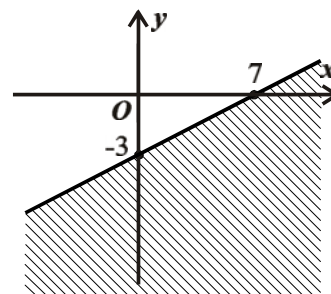
б) 30°

в) 50°

г) 65°

Задача 22**1 балл**

Опираясь на рисунок определите множество решений какого из нижеперечисленных неравенств изображено на координатной плоскости Oxy в виде заштрихованной области.



- а) $7y - 3x \leq -21$
- б) $7y - 3x \geq -21$
- в) $3y - 7x \leq 21$
- г) $3y - 7x \geq 21$

Задача 23**1 балл**

Решите неравенство $\frac{1}{x-3} < 5$.

- а) $(16/5; +\infty)$
- б) $(3; 16/5)$
- в) $(-\infty; 3)$
- г) $(-\infty; 3) \cup (16/5; +\infty)$

Задача 24**1 балл**

Найти угол между векторами $\vec{a} = (1; \sqrt{3})$ и $\vec{b} = (1; -\sqrt{3})$.

- а) 180°
- б) 60°
- в) 120°
- г) 150°

Задача 25**1 балл**

Если L и M - несовпадающие параллельные плоскости, а плоскость N пересекает плоскости L и M по прямым a и b , соответственно, то

- а) a и b параллельные прямые
- б) a и b скрещивающиеся прямые
- в) прямые a и b пересекаются в точке, лежащей на плоскости M
- г) прямые a и b пересекаются в точке, лежащей на плоскости N

Задача 26**1 балл**

Чему равен $\log_{10} \frac{\sqrt{a}}{b}$, если $\log_{10} a = 2$ и $\log_{10} b = 3$?

- а) -2
- б) -3
- в) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- г) $\log_{10} \frac{\sqrt{2}}{3}$

Задача 27**1 балл**

Площадь правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 6. Чему равна площадь треугольника ACE ?

- а) 3
- б) $6(\sqrt{3}-1)$
- в) $3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$
- г) 4

Задача 28**1 балл**

Члены последовательности натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n удовлетворяют соотношению $a_{k+1} = 2a_k + 1$ при $k \geq 1$. Найти второй член этой последовательности, если известно, что последовательность содержит только одно четное число, равное 12-ти.

а) 11

б) 12

в) 25

г) 51

Задача 29**1 балл**

Найти наименьшее значение функции $f(x) = 1 - (\sin x + \cos x)^2$, определенной на множестве действительных чисел.

а) -1

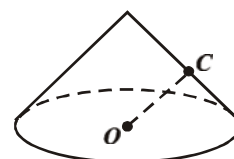
б) 0

в) $-\sqrt{3}$

г) 1

Задача 30**1 балл**

Перпендикуляр OC опущенный из центра основания конуса на образующую делит образующую пополам. Найти площадь боковой поверхности этого конуса, если длина отрезка OC равна 3 см.

а) $18\pi\sqrt{2}$ см²б) $9\pi\sqrt{3}$ см²в) $24\pi\sqrt{2}$ см²г) $24\pi\sqrt{3}$ см²

Задача 31**2 балла**

Гиа имеет 28 монет достоинством в 2 и 5 тетри суммарной стоимостью 89 тетри. Сколько монет достоинством в 2 тетри имеет Гиа?

Задача 32**2 балла**

Решить квадратное неравенство

$$x^2 - 11x + 4 < 0.$$

Задача 33**2 балла**

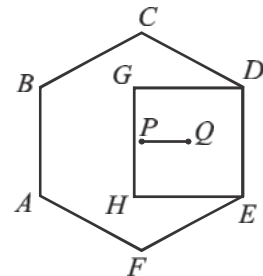
Вершины прямоугольника лежат на окружности радиуса 6 см. Одна из сторон прямоугольника равна радиусу этой окружности. Найти другую сторону прямоугольника.

Задача 34**2 балла**

Найти значения параметров k и b в уравнении $y = kx + b$, если известно, что прямая, определенная этим уравнением, пересекает оси прямоугольной системы координат Oxy в точках $(5; 0)$ и $(0; 3)$.

Задача 35**3 балла**

Правильный шестиугольник $ABCDEF$ и квадрат $DGHE$ имеют общую сторону DE (см. рисунок). Найти площадь этого шестиугольника, если $PQ = 2$, где P - центр правильного шестиугольника, а Q - центр квадрата.



Задача 36**3 балла**

Медиана трех числовых данных на 5 больше наименьшего из данных и на 9 меньше наибольшего из данных. На сколько средняя этих данных больше их медианы?

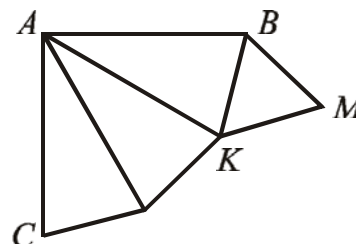
Задача 37**3 балла**

Решить уравнение

$$\log_2(x-6) + \log_2(x+10) = 4.$$

Задача 38**4 балла**

На рисунке изображена развертка правильной треугольной пирамиды на плоскости. Найти высоту этой пирамиды, опущенную на основание BMK , если $BC = 4$, а $\angle CAB = 90^\circ$.



Задача 39**4 балла**

Велосипедист каждую минуту отстает от мотоциклиста на 500 метров, поэтому на прохождение 52 км ему требуется на 2 часа и 42 минуты больше, чем мотоциклисту. Найти скорости велосипедиста и мотоциклиста, если они двигались с постоянными скоростями.

Задача 40**4 балла**

Для каждого значения параметра a из интервала $-5 < a < 2$ рассмотрим в прямоугольной системе координат Oxy фигуру, определенную множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} 5 + a - |2y| \geq 0 \\ |x| \leq \frac{|a-2|}{2}. \end{cases}$$

Найти наибольшую площадь, которую может иметь эта фигура, и установить значение параметра a , при котором достигается эта наибольшая площадь.

Схемы оценки заданий I варианта

Задача 31

2 балла

Гиа имеет 28 монет достоинством в 2 и 5 тетри суммарной стоимостью 89 тетри. Сколько монет достоинством в 2 тетри имеет Гиа?

Решение

Обозначим через x количество монет достоинством в 2 тетри, тогда количество монет достоинством в 5 тетри будет $28 - x$. Суммарная стоимость монет достоинством в 2 тетри равна $2x$, а суммарная стоимость монет достоинством в 5 тетри равна $5(28 - x)$.

По условию задачи $2x + 5(28 - x) = 89 \Rightarrow 3x = 51 \Rightarrow x = 17$.

Ответ: 17.

Задача 32

2 балла

Решить квадратное неравенство

$$x^2 - 11x + 4 < 0.$$

Решение

$$x^2 - 11x + 4 = 0$$

$$D = 121 - 4 \cdot 4 = 105$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{105}}{2}$$

Поэтому множеством решений квадратного неравенства $x^2 - 11x + 4 < 0$ будет интервал $\left(\frac{11 - \sqrt{105}}{2}, \frac{11 + \sqrt{105}}{2} \right)$.

Ответ: $\left(\frac{11 - \sqrt{105}}{2}, \frac{11 + \sqrt{105}}{2} \right)$.

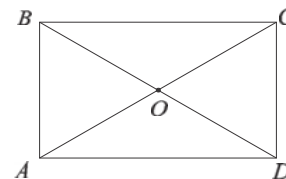
Задача 33**2 балла**

Вершины прямоугольника лежат на окружности радиуса 6 см. Одна из сторон прямоугольника равна радиусу этой окружности. Найти другую сторону прямоугольника.

Решение 1

Центр окружности O находится в точке пересечения диагоналей прямоугольника, поэтому $AC = 2r = 12$ см (r - радиус окружности).

Если $AB = r = 6$, то $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 6\sqrt{3}$ см.



Ответ: $6\sqrt{3}$ см

Решение 2

Если $AB = r$, то треугольник ABO равносторонний: $AB = AO = BO = r$, поэтому $\angle OAB = 60^\circ$ и $BC = AB \cdot \tan 60^\circ = 6\sqrt{3}$ см.

Ответ: $6\sqrt{3}$ см

Задача 34**2 балла**

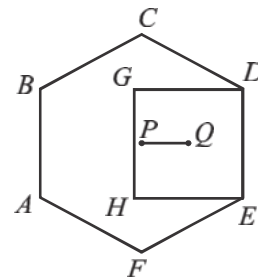
Найти значения параметров k и b в уравнении $y = kx + b$, если известно, что прямая, определенная этим уравнением, пересекает оси прямоугольной системы координат Oxy в точках $(5; 0)$ и $(0; 3)$.

Решение

По условию задачи имеем $5k + b = 0$ и $0k + b = 3$. Отсюда $b = 3$ и $k = -\frac{3}{5}$.

Ответ: $b = 3$ и $k = -\frac{3}{5}$.

Правильный шестиугольник $ABCDEF$ и квадрат $DGHE$ имеют общую сторону DE (см. рисунок). Найти площадь этого шестиугольника, если $PQ = 2$, где P - центр правильного шестиугольника, а Q - центр квадрата.



Решение

Длину стороны правильного шестиугольника обозначим через a . Тогда расстояние PR из центра шестиугольника до стороны DE шестиугольника равно $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а расстояние QR из центра квадрата до стороны DE квадрата равна $a/2$. Поэтому

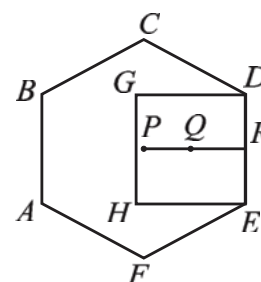
$$PQ = PR - QR = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2} = 2 \Rightarrow$$

$$a = \frac{4}{\sqrt{3}-1} = 2(\sqrt{3}+1).$$

Вычислим площадь правильного шестиугольника с помощью стороны:

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = 6\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^2 = 12(3+2\sqrt{3})$$

Ответ: $12(3+2\sqrt{3})$.



Задача 36**3 балла**

Медиана трех числовых данных на 5 больше наименьшего из данных и на 9 меньше наибольшего из данных. На сколько средняя этих данных больше их медианы?

Решение

Пусть x является медианой этих трех чисел, тогда наименьшее данное будет $x - 5$, а наибольшее данное будет $x + 9$. Так как среднее равно $\frac{x - 5 + x + x + 9}{3}$, то разность средней и медианы будет $\frac{x - 5 + x + x + 9}{3} - x = \frac{4}{3}$.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Задача 37**3 балла**

Решить уравнение

$$\log_2(x-6) + \log_2(x+10) = 4.$$

Решение

Установим множество допустимых значений данного уравнения:

$$\begin{cases} x-6 > 0 \\ x+10 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 6.$$

$$\log_2[(x-6)(x+10)] = 4 \Rightarrow (x-6)(x+10) = 16 \Rightarrow x^2 + 4x - 76 = 0.$$

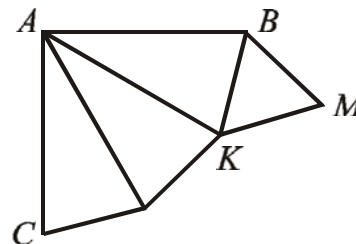
$$\frac{D}{4} = 4 + 76 = 80.$$

$$x_1 = -2 - 4\sqrt{5}, \quad x_2 = -2 + 4\sqrt{5}.$$

Из этих корней только x_2 находится в множестве допустимых значений

Ответ: $-2 + 4\sqrt{5}$

На рисунке изображена развертка правильной треугольной пирамиды на плоскости. Найти высоту этой пирамиды, опущенную на основание BMK , если $BC = 4$, а $\angle CAB = 90^\circ$.



Решение

Из данной развертки построим правильную треугольную пирамиду $ABMK$ (где вершина C развертки совпадает с вершиной B). Искомой высотой, опущенной на основание BMK , является AO (см. рисунок). Из условия следует, что на развёртке

$$AB = \frac{BC}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, \text{ тогда}$$

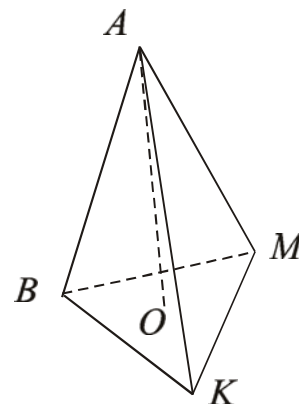
$$BK^2 = 2 \cdot AB^2 - 2AB^2 \cos 30^\circ = 16 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 8(2 - \sqrt{3}),$$

$$BO^2 = \left(\frac{2}{3} BK \cdot \sin 60^\circ \right)^2 = \frac{1}{3} BK^2 = \frac{8}{3} (2 - \sqrt{3}).$$

$$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{8 - \frac{8}{3} (2 - \sqrt{3})} = \sqrt{\frac{8(1 + \sqrt{3})}{3}}.$$

$$AO = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}}{3}}.$$

Ответ: $AO = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}}{3}} = \frac{2\sqrt{6(1 + \sqrt{3})}}{3}$



Задача 39**4 балла**

Велосипедист каждую минуту отстает от мотоциклиста на 500 метров, поэтому на прохождение 52 км ему требуется на 2 часа и 42 минуты больше, чем мотоциклисту. Найти скорости велосипедиста и мотоциклиста, если они двигались с постоянными скоростями.

Решение

Пусть скорость велосипедиста x км/ч = $\frac{100x}{6}$ м/мин, а скорость мотоциклиста y км/ч = $\frac{100y}{6}$ м/мин. По условию задачи $\frac{100y}{6} - \frac{100x}{6} = 500$. Для прохождения 52 км велосипедисту потребовалось $\frac{52}{x}$ ч., а мотоциклисту $\frac{52}{y}$ ч. Поэтому,

$$\frac{52}{x} - \frac{52}{y} = 2\frac{42}{60} = 2,7.$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{y}{6} - \frac{x}{6} = 5 \\ \frac{52}{x} - \frac{52}{y} = 2,7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = 30 \\ 52(y - x) = 2,7xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 30 \\ 9x^2 + 270x - 5200 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{40}{3}, y_1 = \frac{130}{3} \text{ и } x_2 = -\frac{130}{3}, y_2 = -\frac{40}{3}.$$

Условию задачи удовлетворяет только решение $x_1 = \frac{40}{3}$, $y_1 = \frac{130}{3}$.

Ответ: $\frac{40}{3}$ км/ч, $\frac{130}{3}$ км/ч.

Задача 40**4 балла**

Для каждого значения параметра a из интервала $-5 < a < 2$ рассмотрим в прямоугольной системе координат Oxy фигуру, определенную множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} 5 + a - |2y| \geq 0 \\ |x| \leq \frac{|a-2|}{2}. \end{cases}$$

Найти наибольшую площадь, которую может иметь эта фигура, и установить значение параметра a , при котором достигается эта наибольшая площадь.

Решение

$$\begin{cases} 5 + a - |2y| \geq 0 \\ |x| \leq \frac{|a-2|}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |y| \leq \frac{a+5}{2} \\ |x| \leq -\frac{a-2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{a+5}{2} \leq y \leq \frac{a+5}{2} \\ \frac{a-2}{2} \leq x \leq -\frac{a-2}{2} \end{cases}$$

На координатной плоскости Oxy множество решений последней системы представляет собой прямоугольник со сторонами $a+5$ и $2-a$. Площадь этого прямоугольника $S(a) = (a+5)(2-a) = -a^2 - 3a + 10$. Наибольшее значение полученный квадратный

трехчлен достигает при $a = -\frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$. Поэтому $S\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{49}{4}$.

Ответ: $S = \frac{49}{4}$, $a = -\frac{3}{2}$.

Ответы

1	в
2	б
3	в
4	б
5	в
6	г
7	б
8	а
9	б
10	в
11	б
12	б
13	г
14	г
15	г
16	б
17	в
18	а
19	г
20	г
21	б
22	а
23	г
24	в
25	а
26	а
27	а
28	в
29	а
30	а
31	17
32	$\left(\frac{11-\sqrt{105}}{2}; \frac{11+\sqrt{105}}{2} \right)$
33	$6\sqrt{3}$ см
34	$k = -\frac{3}{5}; b = 3$
35	$12(3+2\sqrt{3})$
36	$\frac{4}{3}$
37	$4\sqrt{5}-2$

38	$\frac{2\sqrt{6(1+\sqrt{3})}}{3}$
39	$\frac{40}{3} \text{ км/ч}; \frac{130}{3} \text{ км/ч}$
40	$a = -\frac{3}{2}; S_{\max} = \frac{49}{4}$

Лист ответов

На экзаменах абитуриентам раздают тетради тестовых заданий и листы ответов. В тетради тестовых заданий даны условия задач и оставлено место для черновой работы, которое абитуриент может использовать по своему усмотрению. **Эта часть работы абитуриента не будет оцениваться.**

Правильные ответы и решения абитуриент должен перенести в лист ответов. Решение каждой из задач с тридцать первой по сороковую включительно абитуриент должен перенести в лист ответов на то место, которое выделено именно для этой задачи. **Для каждой из задач должен быть четко указан ход решения.**