მათემატიკაში მასწავლებლის საგნის გამოცდის ტესტის პასუხები

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ბ	დ	ა	დ	ბ	ბ	გ	დ	ა	ბ	ა	ბ	დ	ა	გ	დ

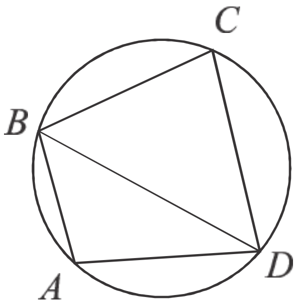
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
დ	ა	გ	ბ	გ	გ	ბ	ბ	გ	დ	ა	დ	გ	ა	ა	გ

ამოცანა 33 **4 ქულა**

დაამტკიცეთ თეორემა: ამოზნექილ ოთხკუთხედზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა, თუ მისი ორი მოპირდაპირე კუთხის ჯამი $180°$-ია.

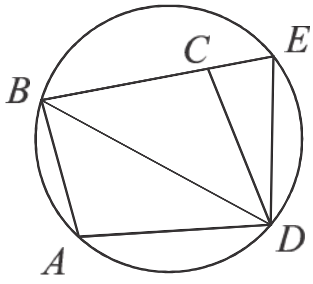
პასუხის ერთ-ერთი ვარიანტი, რომელიც მაქსიმალური ქულით შეფასდება:

ვთქვათ $ABCD$ ოთხკუთხედზე შემოხაზულია წრეწირი, მაშინ $\angle A+\angle C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{DCB}=\frac{360°}{2}=180°$.

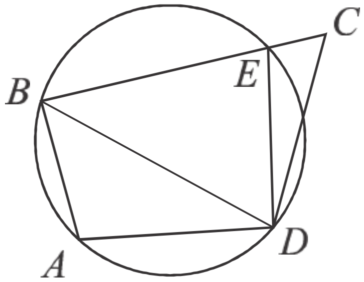


პირიქით, ვთქვათ $ABCD$ ოთხკუთხედის ორი მოპირდაპირე A და C კუთხის ჯამი $180°$-ია. ABD სამკუთხედზე შემოვხაზოთ წრეწირი. შესაძლებელია სამი შემთხვევა:

1. C წერტილი ABD სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე მდებარეობს, მაშინ A,B,C,D წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობს.



2. C წერტილი ABD სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირის შიგნით მდებარეობს (იხ. ნახაზი). გავაგრძელოთ ოთხკუთხედის BC გვერდი წრეწირის გადაკვეთამდე და გადაკვეთის E წერტილი შევაერთოთ D წვეროსთან. $ABED$ ოთხკუთხედი წრეწირშია ჩახაზული, ამიტომ ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად $\angle A+\angle E=180°$. კუთხე BCD წარმოადგენს CED სამკუთხედის გარე კუთხეს, ამიტომ $\angle BCD>\angle E$, მაშასადამე $\angle A+\angle BCD>\angle A+\angle E>180°$, რაც თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება.



3. C წერტილი ABD სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირის გარეთ მდებარეობს (იხ. ნახაზი). BC მონაკვეთის წრეწირთან

გადაკვეთის E წერტილი შევაერთოთ D წვეროსთან. $ABED$ ოთხკუთხედი წრეწირშია ჩახაზული, ამიტომ $\angle A+\angle E=180°$. კუთხე BED წარმოადგენს CED სამკუთხედის გარე კუთხეს, ამიტომ $\angle C<\angle BED$ და $\angle A+\angle C<\angle A+\angle BED=180°$, რაც ისევ ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას.
ამრიგად, თეორემის პირობასთან თავსებადია მხოლოდ პირველი შემთხვევა: A,B,C,D წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობს.

ამოცანა 34 **7 ქულა**

თქვენ გაკვეთილზე ახსენით თემა „ოპერაციები ხდომილობებზე. ორი ხდომილობის ჯამის ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულა“.

გაკვეთილის ბოლოს მოსწავლეებს მიეცით ამოცანა: “იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის ორჯერ გაგორების შედეგად ერთხელ მაინც მოვა სამიანი“.
ნიკამ ეს ამოცანა შემდეგნაირად ამოხსნა: „ A -თი აღვნიშნოთ ხდომილობა, რომ კამათლის პირველი გაგორების დროს მოვა 3-იანი, ხოლო B -თი აღვნიშნოთ ხდომილობა, რომ კამათლის მეორე გაგორების დროს მოვა 3-იანი. მაშინ $p(A)=p(B)=\dfrac{1}{6}$ და $A+B$ წარმოადგენს ხდომილობას, რომ კამათლის ორჯერ გაგორებისას ერთხელ მაინც მოვა სამიანი. რადგან A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, ამიტომ $p(A+B)=p(A)+p(B)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$. პასუხი: $\dfrac{1}{3}$.“

თქვენი დავალებაა:

1) გაახსენოთ მოსწავლეებს შემდეგი ცნებები: ორი ხდომილების ჯამი და ნამრავლი, დამოუკიდებელი და არათავსებადი ხდომილობები. ორი ხდომილობის ჯამის ალბათობა. **(4 ქულა)**
2) მიუთითოთ, რა შეცდომა/შეცდომები დაუშვა ნიკამ ამოხსნაში. შეასწორეთ ნიკას შეცდომა და ამოხსნა მიიყვანეთ ბოლომდე. მსჯელობა აწარმოეთ ნათლად, მოსწავლისთვის გასაგებ ენაზე. **(3 ქულა)**

პასუხის ერთ-ერთი ვარიანტი, რომელიც მაქსიმალური ქულით შეფასდება:

34.1

A და B ხდომილობათა ჯამი (გაერთიანება) ეწოდება იმ ელემენტარული ხდომილობებისაგან შედგენილ C ხდომილობას, რომლებიც ეკუთვნის A და B ხდომილობებიდან ერთ-ერთს მაინც. A და B ხდომილობათა ჯამი აღინიშნება $A+B$ ან $A\cup B$ სიმბოლოთი.

A და B ხდომილობათა ნამრავლი (თანაკვეთა) ეწოდება იმ ელემენტარული ხდომილობებისაგან შედგენილ C ხდომილობას, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის A და B ხდომილობებს. A და B ხდომილობათა ნამრავლი აღინიშნება $A \cdot B$ ან $A \cap B$ სიმბოლოთი.

ორ A და B ხდომილობას ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ სამართლიანია ტოლობა: $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)$.

ორ A და B ხდომილობას არათავსებადი ეწოდება, თუ მათ საერთო ელემენტარული ხდომილობა არ აქვთ.

ნებისმიერი ორი A და B ხდომილობისათვის სამართლიანია ტოლობა: $p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B)$.

34. 2.

ნიკამ მართებულად აღნიშნა, რომ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაგრამ მან შეცდომით დამოუკიდებელი ხდომილობების ნამრავლის ალბათობის თვისება გამოიყენა ხდომილობათა ჯამის ალბათობისათვის. მას უნდა დაეწერა: $p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B)$. რადგან A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, ამიტომ $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)$, და საბოლოოდ ვღებულობთ: $p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$.

პასუხი: $\frac{11}{36}$.

ამოცანა 35 **8 ქულა**

თქვენ გაკვეთილზე ახსენით თემა „ჰომოთეტიის გარდაქმნა სიბრტყეზე“.

გაკვეთილის ბოლოს გადაწყვიტეთ მოსწავლეებს დაანახოთ კავშირი ორი ფიგურის მსგავსებასა და ჰომოთეტიურობას შორის.

თქვენი დავალებაა:

1) შეახსენოთ მოსწავლეებს შემდეგი მასალა: ორი ფიგურის მსგავსების ცნება, ჰომოთეტიის ცნება, ორი ფიგურის ჰომოთეტიურობა. **(3 ქულა)**
2) აუხსნათ მოსწავლეს თუ რას წარმოადგენს a წრფისა და მისი ჰომოთეტიური ფიგურის საერთო წერტილთა სიმრავლე. პასუხთან ერთად საილუსტრაციოდ მოიყვანეთ შესაბამისი ნახაზი/ნახაზები. **(2 ქულა)**
3) კლასში თქვენ დაამტკიცეთ დებულება „თუ ორი ფიგურა ჰომოთეტიურია, მაშინ ეს ფიგურები მსგავსია“. ერთ-ერთმა მოსწავლემ დასვა კითხვა: სამართლიანია თუ არა

შებრუნებული დებულება? ჩამოაყალიბეთ ეს შებრუნებული დებულება და გაეცით მოსწავლეს დასაბუთებული პასუხი. **(3 ქულა)**

პასუხის ერთ-ერთი ვარიანტი, რომელიც მაქსიმალური ქულით შეფასდება:

35.1

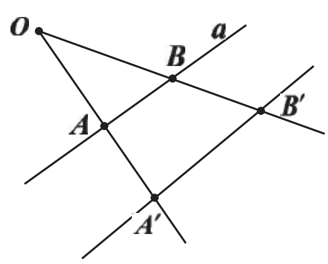
1) F_1 და F_2 ფიგურებს ეწოდება მსგავსი, თუ არსებობს ისეთი ასახვა $f: F_1 \to F_2$ და დადებითი $k \in \mathbb{R}$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი ორი $X, Y \in F_1$ წერტილისათვის მანძილი $f(X)$ და $f(Y)$ წერტილებს შორის k -ჯერ აღემატება მანძილს X და Y წერტილებს შორის. k რიცხვს ეწოდება მსგავსების კოეფიციენტი.
2) ჰომოთეტია O ცენტრით და $k \neq 0$ კოეფიციენტით ეწოდება სიბრტყის თავის თავზე ასახვას, რომელიც სიბრტყის ნებისმიერ A წერტილს ასახავს ისეთ A' წერტილზე, რომ $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$. ჰომოთეტია O ცენტრითა და k კოეფიციენტით ტრადიციულად H_O^k სიმბოლოთი აღინიშნება.
3) F ფიგურას ეწოდება Φ ფიგურის ჰომოთეტიური, თუ არსებობს ჰომოთეტიის ასახვა H_O^k, რომელსაც ერთ-ერთი ფიგურა მეორეში გადაყავს.

35.2

თუ ჰომოთეტიის კოეფიციენტი 1-ის ტოლია, მაშინ ჰომოთეტია არის იგივური გარდაქმნა და ამ შემთხვევაში a წრფისა და მისი ჰომოთეტიური ფიგურის საერთო წერტილთა სიმრავლე წარმოადგენს თავად a წრფეს.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევები, როდესაც $k \neq 1$.

1) თუ ჰომოთეტიის O ცენტრი მდებარეობს a წრფეზე, მაშინ $H_O^k(a) = a$, ნებისმიერი $k \neq 0$ კოეფიციენტისათვის. ამ შემთხვევაში a წრფისა და მისი ჰომოთეტიური ფიგურის საერთო წერტილთა სიმრავლე წარმოადგენს თავად a წრფეს. მართლაც, რადგან O წერტილი a წრფეზე მდებარეობს, მაშინ ნებისმიერი $A \in a$ წერტილისათვის მისი ჰომოთეტიური A' წერტილიც a წრფეზე უნდა მდებარეობდეს, წინააღმდეგ შემთხვევაში $\overrightarrow{OA}$ ვექტორი და $\overrightarrow{OA'}$ ვექტორი არ იქნება კოლინეარული და დაირღვევა ტოლობა $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$. მეორეს მხრივ, a წრფეზე მდებარე ნებისმიერი A' წერტილი წარმოადგენს a წრფეზე მდებარე რომელიღაც წერტილის ჰომოთეტიურ წერტილს და მაშასადამე, $H_O^k(a) = a$. სქემატურად ეს შეიძლება შემდეგნაირად გამოვსახოთ



2) ვთქვათ ჰომოთეტიის O ცენტრი არ მდებარეობს a წრფეზე. ავიღოთ ორი განსხვავებული A და B წერტილი a წრფეზე. ვთქვათ

$A' = H_O^k(A)$ და $B' = H_O^k(B)$, ვიგულისხმოთ $k > 0$ (იხ. სურათი). მაშინ

$\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$, რადგან $\angle O$ საერთოა და $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$.

ანალოგიურად განიხილება შემთხვევა $k < 0$. მაშასადამე $H_O^k(a) = A'B'$ და $A'B' \parallel AB$. ამ შემთხვევაში წრფისა და მისი ჰომოთეტიური ფიგურის საერთო წერტილთა სიმრავლე ცარიელია.

ამრიგად, თუ ჰომოთეტიის ცენტრი მდებარეობს a წრფეზე, მაშინ ამ წრფისა და მისი ჰომოთეტიური ფიგურის საერთო წერტილთა სიმრავლე წარმოადგენს თავად a წრფეს.
თუ ჰომოთეტიის ცენტრი არ მდებარეობს a წრფეზე, მაშინ ამ წრფისა და მისი ჰომოთეტიური ფიგურის საერთო წერტილთა სიმრავლე ცარიელია.

35.3

შებრულებული დებულება ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად:

„თუ ორი ფიგურა მსგავსია, მაშინ ეს ფიგურები ჰომოთეტიურებია“.

აღნიშნული დებულება მცდარია. მოვიყვანოთ კონტრმაგალითი.

ვთქვათ $\triangle AB_1C_1$ მიიღება $\triangle ABC$ -გან A წერტილის გარშემო საათის ისრის მიმართულებით $10°$ -იანი კუთხით მობრუნებით. ცხადია, რომ $\triangle AB_1C_1$ და $\triangle ABC$ მსგავსი ფიგურებია, რადგან მობრუნება მსგავსების გარდაქმნაა (წერტილებს შორის მანძილებს ინარჩუნებს). მაგრამ ეს სამკუთხედები ვერ იქნება ერთმანეთის ჰომოთეტიურები, რადგან როგორც წინა პუნქტში დავამტკიცეთ ჰომოთეტიას მონაკვეთი მის პარალელურ მონაკვეთში გადაყავს. ჩვენს შემთხვევაში კი AB_1 არ არის AB -ს პარალელური.

ამოცანა 36 **8 ქულა**

თქვენი ამოცანაა კლასს აუხსნათ ლოგარითმის ცნება და მისი თვისებები. შეასრულეთ შემდეგი დავალებები:

1) განმარტეთ რიცხვის ლოგარითმი, მაჩვენებლიან ფუნქციის თვისებებზე დაყრდნობით დაასაბუთეთ ლოგარითმის არსებობა და ერთადერთობა. ჩამოაყალიბეთ და დაასაბუთეთ ნამრავლის, ფარდობისა და ხარისხის ლოგარითმის თვისებები. **(5 ქულა)**

2) დაამტკიცეთ: თუ $a, b \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$, $c \in (0; +\infty)$, მაშინ

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c .$$

(დამტკიცებისას არ გამოიყენოთ ლოგარითმის ფუძის შეცვლის ფორმულა, რადგან ის ზემოთ მოყვანილი ტოლობის საშუალებით მტკიცდება). **(1 ქულა)**

3) გაკვეთილის მსვლელობაში თქვენ კლასს აჩვენეთ ათობითი ლოგარითმების ცხრილი, გამოიყენება ლოგარითმების მნიშვნელობების მიახლოებით გამოსათვლელად. ცხრილის დათვალიერებისას ერთმა მოსწავლემ შენიშნა, რომ მასში მოცემულია მხოლოდ ერთიდან ათამდე რიცხვების ლოგარითმები. მან იკითხა, შესაძლებელია თუ არა ამ ცხრილის საშუალებით ერთზე ნაკლები ან ათზე მეტი რიცხვის ათობითი ლოგარითმის გამოთვლა. მაგალითად, როგორ გამოითვლება $\frac{1}{4}$-ის და 201-ის ლოგარითმი 10-ის ფუძით?

გაეცით დასაბუთებული პასუხი მოსწავლის შეკითხვას. **(2 ქულა)**

პასუხის ერთ-ერთი ვარიანტი, რომელიც მაქსიმალური ქულით შეფასდება:

36.1

$f(x)=a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებებიდან ცნობილია, რომ მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეა $(0,+\infty)$, ამასთან როცა $0<a<1$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია მკაცრად კლებადია, ხოლო როცა $a>1$, მაშინ ეს ფუნქცია მკაცრად ზრდადია, ამიტომ თუ $a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, $b\in(0,+\infty)$, მაშინ განტოლებას $a^x=b$ ერთადერთი ამონახსნი გააჩნია. ამ ამონახსნს ეწოდება b რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით და $\log_a b$ -თი აღინიშნება. განმარტებიდან გამომდინარეობს ლოგარითმის **ძირითადი თვისება**: თუ $a\in(0;1)\cup(1;+\infty)$, $b\in(0;+\infty)$, მაშინ $a^{\log_a b}=b.$

ლოგარითმის თვისებები: ვთქვათ $a\in(0;1)\cup(1;+\infty)$, $x,y\in(0;+\infty)$, $p\in(-\infty;+\infty)$, მაშინ ლოგარითმის ძირითადი თვისების და ხარისხის თვისებების გამო:

ა) $a^{\log_a(x\cdot y)}=x\cdot y=\left(a^{\log_a x}\right)\left(a^{\log_a y}\right)=a^{\log_a x+\log_a y}$, ამიტომ $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$.

ბ) $a^{\log_a\left(\frac{x}{y}\right)}=\frac{x}{y}=\frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}}=a^{\log_a x-\log_a y}$, ამიტომ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$.

გ) $a^{\log_a x^p}=x^p=\left(a^{\log_a x}\right)^p=a^{p\log_a x}$, ამიტომ $\log_a x^p=p\log_a x.$

36.2

ლოგარითმის ძირითადი თვისებისა და ხარისხის ლოგარითმის თვისების გამო:

$\log_a b\cdot\log_b c=\log_a\left(b^{\log_b c}\right)=\log_a c$.

36.3

იმისათვის, რომ ათობითი ლოგარითმების ცხრილის საშუალებით გამოვთვალოთ ერთზე ნაკლები ან ათზე მეტი A რიცხვის ლოგარითმი, საჭიროა ეს რიცხვი წარმოვადგინოთ 10-ის მთელი m ხარისხისა და a რიცხვის ნამრავლის სახით: $A=a\cdot10^m$, სადაც $1\le a<10$: .

ამისათვის საკმარისია m ისე შევარჩიოთ, რომ $10^m \le A < 10^{m+1}$ (ასეთი m-ის შერჩევა ყოველთვის შეიძლება). მაშინ $a = \frac{A}{10^m}$ დააკმაყოფილებს ტოლობას $1 \le a < 10$ და $\lg A = \lg a + \lg 10^m = \lg a + m$. რიცხვს $\lg a$ ვიპოვით ცხრილიდან და დავუმატებთ ადრე ნაპოვნ მთელ m რიცხვს.

მოსწავლის მიერ მოყვანილი მაგალითების შემთხვევაში:

$$\lg\left(\frac{1}{4}\right) = \lg(0,25) = \lg\left(2,5 \cdot 10^{-1}\right) = \lg 2,5 + \lg\left(10^{-1}\right) = \lg 2,5 - 1.$$

$$\lg(201) = \lg\left(2,01 \cdot 10^2\right) = \lg 2,01 + \lg\left(10^2\right) = \lg 2,01 + 2.$$