ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა მათემატიკაში

II ტური

X კლასი

ამოცანა 1 5 ქულა

იპოვეთ 2^k (სადაც $k \in \mathbb{N}$) სახის უდიდესი რიცხვი, რომელიც არის $n^2+4n-33$-ის გამყოფი n-ის რაიმე მთელი მნიშვნელობისათვის.

ამოხსნა

გვაქვს $n^2+4n-33=n(n+4)-33$. ვინაიდან n და $n+4$ რიცხვებს ერთნაირი კენტლუწოვნება აქვთ, ამიტომ მოცემული გამოსახულება, რომ ორზე გაიყოს აუცილებელი და საკმარისია n იყოს კენტი რიცხვი. როცა $n=2k-1$, მოცემული გამოსახულება მიიღებს სახეს $(2k-1)(2k+3)-33=4k^2+4k-36=4(k^2+k-9)=4(k(k+1)-9)$. მაშასადამე მოცემული გამოსახულება იყოფა 2^2. შევნიშნოთ, რომ $k(k+1)$ ლუწი რიცხვია, ამიტომ $k(k+1)-9$ კენტია, ამიტომ ის ვერ გაიყოფა 2-ზე.

პასუხი: 2^2.

ამოცანა 2 5 ქულა

იპოვეთ $f(-\sqrt{2})$ ყოველი იმ f ფუნქციისათვის, რომელისთვისაც სამართლიანია $2f(x)+f(x^2-1)=1$ ტოლობა, სადაც x ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

ამოხსნა

როცა $x=-\sqrt{2}$ გვაქვს $2f(-\sqrt{2})+f(1)=1$. რომ ვიპოვოთ $f(1)$, ამისათვის განვიხილოთ მოცემული ტოლობა $x=0,\pm1$ მნიშვნელობებისათვის. გვექნება სისტემა

$$\begin{cases} 2f(0)+f(-1)=1 \\ 2f(1)+f(0)=1 \\ 2f(-1)+f(0)=1. \end{cases}$$

სისტემის ამოხსნის შედეგად გვექნება $f(0)=f(1)=f(-1)=1/3$. საბოლოოდ გვექნება $f(-\sqrt{2})=1/3$.

პასუხი: 1/3.

ამოცანა 3 — 5 ქულა

იპოვეთ ნატურალური რიცხვების ყველა ისეთი (a,b) წყვილი (სადაც $a \le b$), რომ ნებისმიერი x და y ნამდვილი რიცხვებისათვის რომელთათვისაც $a \le x \le y \le b$, სამართლიანი იყოს უტოლობა $a \le \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \le b.$

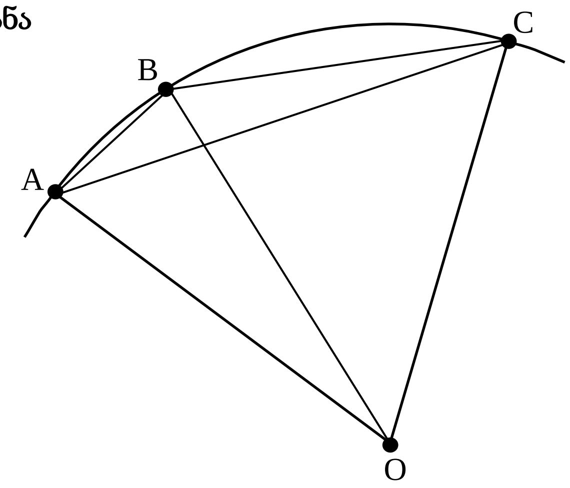
ამოხსნა

თუ განვიხილავთ $x = y$, დავასკვნით, რომ $a \le 2.$ შევნიშნოთ, რომ $a \ne 1.$ მართლაც წინააღმდეგ შემთხვევაში, როცა $x = 1$ და $y = b$ გვექნება $x/y + y/x = b + 1/b > b,$ რაც პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასშასადამე $a = 2.$ შევნიშნოთ, რომ $2 \le x/y + y/x.$ ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $b \ge 2$ და $2 \le x \le y \le b$ რიცხვებისათვის სამართლიანია უტოლობა $x/y + y/x \le b.$ ეს უკანასკნელი ტოლფასია უტოლობის $x^2 + y^2 \le bxy.$ გვაქვს $bxy \ge xy^2 \ge 2y^2 \ge x^2 + y^2.$

ამოცანა 4 — 5 ქულა

ამოზნექილი თორმეტკუთხედი ჩახაზულია წრეწირში. ამ თორმეტკუთხედის რომელიღაც ექვსი გვერდის სიგრძე $\sqrt{2}$ -ის ტოლია, ხოლო დანარჩენი ექვსი გვერდის სიგრძე კი - $\sqrt{24}$ -ის. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

ამოხსნა



როგორი თანმიმდევრობითაც არ უნდა განვალაგოთ მრავალკუთხედის გვერდები, მოიძებნება ორი სხვადასხვა სიგრძის მქონე გვერდი, რომელთაც საერთო წვერო აქვთ. ვთქვათ AB და BC ასეთი გვერდებია. A, B და C წერტილები ცალსახად განსაზღვრავს წრეწირს. მაშასადამე საძიებელი წრეწირის რადიუსი არაა დამოკიდებული თუ რა თანმიმდევრობითაა განლაგებული მრავალკუთხედის გვერდები.

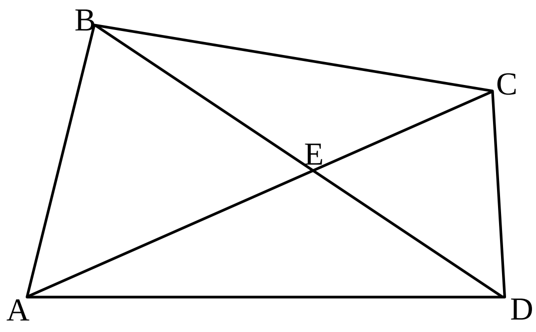
თუ შევაერთებთ თორმეტკუთხედის წვეროებს წრეწირის ცენტრთან მივიღებთ ორი ტიპის (ფუძეებით $\sqrt{2}$ და $\sqrt{24}$) 12 ცალ ტოლფერდა სამკუთხედს. ორი განსხვავებული ტიპის სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხეების ჯამი ტოლია $360^\circ : 6 = 60^\circ.$ მაშასადამე $\angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC = 150^\circ.$ ABC სამკუთხედში კოსინუსების თეორემის გამოყენებით გვექნება $AC = \sqrt{38}$. სამკუთხედი ACO ტოლგვერდაა, ამიტომ წრეწირის რადიუსია $\sqrt{38}.$

პასუხი: $\sqrt{38}$.

ამოცანა 5 5 ქულა

$ABCD$ ამოზნექილი ოთხკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია E. ცნობილია, რომ $S_{ABE}=S_{EDC}=1$, $S_{ABCD}\le 4$ და $AD=3$ (S_{ABE}, S_{EDC} და S_{ABCD} შესაბამისად ABE, EDC სამკუთხედების და $ABCD$ ოთხკუთხედის ფართობებია). იპოვეთ BC მონაკვეთის სიგრძე.

ამოხსნა



ვინაიდან $S_{ABE}=S_{EDC}$ ამიტომ $S_{ABD}=S_{ADC}$. მაშასადამე $AD \parallel BC$. ვთქვათ $S_{AED}=x$. ვინაიდან $S_{AED}:S_{ABE}=DE:BE=S_{DCE}:S_{BCE}$ და $S_{ABE}=S_{EDC}=1$, ამიტომ $S_{BCE}=\frac{1}{x}$. გვაქვს $S_{ABCD}=2+x+\frac{1}{x}$. პირობით $S_{ABCD}\le 4$. მაშასადამე, გვექნება

$$2+x+\frac{1}{x}\le 4 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}\le 2 \Leftrightarrow x=1.$$

საბოლოოდ გვექნება, რომ $S_{ABCD}=4$ და $S_{AED}=S_{BCE}=1=S_{ABE}=S_{DCE}$. მაშასადამე $ABCD$ პარალელოგრამია და $BC=AD=3$.

პასუხი: $BC=3$.

ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა მათემატიკაში

II ტური

XI-XII კლასები

ამოცანა 1 5 ქულა

$(a_n)_{n\geq 1}$ და $(b_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობები განსაზღვრულია ტოლობებით: $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \geq 1$ და $b_1 = 2,\ b_2 = 1,\ b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$, $n \geq 1$. იპოვეთ ყველა ის მთელი რიცხვი, რომელიც ორივე მიმდევრობის წევრია.

ამოხსნა

გვაქვს $a_3 = 3,\ a_4 = 5,\ a_5 = 8$, და $b_3 = 3,\ b_4 = 4,\ b_5 = 7,\ b_6 = 11$. როგორც ვხედავთ $a_1 = b_2 = 1$, $a_2 = b_1 = 2,\ a_3 = b_3 = 3$. ვაჩვენოთ, რომ 1, 2 და 3–ის გარდა არ არსებობს სხვა რიცხვი, რომელიც ორივე მიმდევრობის წევრია.

შევნიშნოთ, რომ $b_4 < a_4 < b_5 < a_5 < b_6$. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დავამტკიცოთ, რომ როცა $n \geq 4$, მაშინ $b_n < a_n < b_{n+1}$. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, $n = 4$ და $n = 5$ შემთხვევებში ჩვენი ჰიპოტეზა სამართლიანია. დავუშვათ ჰიპოტეზა სამართლიანია $n = k$ და $n = k+1$ შემთხვევებში, ე. ი. $b_k < a_k < b_{k+1}$ და $b_{k+1} < a_{k+1} < b_{k+2}$. მაშინ ამ უტოლობების შეკრებით მივიღებთ $b_k + b_{k+1} < a_k + a_{k+1} < b_{k+1} + b_{k+2}$, ე. ი. $b_{k+2} < a_{k+2} < b_{k+3}$. მაშასადამე ჰიპოტეზა სამართლიანია $n = k+2$ შემთხვევაშიც.

ამრიგად, გვაქვს $b_4 < a_4 < b_5 < a_5 < b_6 < a_6 < \ldots < b_k < a_k < b_{k+1} < a_{k+1} < b_{k+2} < \ldots$, საიდანაც ჩანს, რომ 1, 2 და 3–ის გარდა არ არსებობს სხვა რიცხვი, რომელიც ორივე მიმდევრობის წევრია.

პასუხი: საძიებელი რიცხვებია 1, 2 და 3.

ამოცანა 2 5 ქულა

იპოვეთ ერთმანეთის მომდევნო კენტი რიცხვების ყველა (m, n, k) სამეული (სადაც $m < n < k$), რომლისთვისაც $m^2 + n^2 + k^2$ რიცხვი არის ერთი და იგივე ციფრით ჩაწერილი ოთხნიშნა რიცხვი.

ამოხსნა

ვთქვათ $m = 2i - 1$, $n = 2i + 1$ და $k = 2i + 3$, სადაც i ნატურალური რიცხვია. მაშინ $m^2 + n^2 + k^2 = (2i-1)^2 + (2i+1)^2 + (2i+3)^2 = 12i^2 + 12i + 11$. ვინაიდან $12i^2 + 12i + 11$ უნდა იყოს ერთიდაიგივე ციფრით ჩაწერილი ოთხნიშნა რიცხვი, ამიტომ $12i^2 + 12i$ უნდა იყოს ოთხნიშნა რიცხვი, რომლის პირველი ორი ციფრი ერთნაირია, ხოლო შემდეგი ორი კი ასევე ერთნაირი და წინაზე ერთით ნაკლები ციფრებია. ვთქვათ ეს ციფრებია $r, r, r-1, r-1$. რადგან $12i^2 + 12i$ ლუწია, ამიტომ $r-1$ ლუწია. მაშასადამე $12i^2 + 12i$ უნდა ვეძიოთ 1100, 3322, 5544, 7766 და 9988 რიცხვებს შორის. რადგან $12i^2 + 12i$ იყოფა 3–ზე, ამიტომ შესაძლებელია მხოლოდ $12i^2 + 12i = 5544$ შემთხვევა. მიღებული განტოლების ნატურალური ამონახსნია $i = 21$. ამრიგად , საძიებელი სამეულია $(41, 43, 45)$.

პასუხი: საძიებელი სამეულია $(41, 43, 45)$.

ამოცანა 3 5 ქულა

მოცემულია $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \ldots, [a_{2015}, b_{2015}]$ შუალედები ისეთი, რომ $[a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup [a_3, b_3] \cup \ldots \cup [a_{2015}, b_{2015}] = [0; 1]$. დაამტკიცეთ, რომ ამ შუალედებიდან შეგვიძლია ავარჩიოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი შუალედები (ერთი ან რამდენიმე), რომელთა სიგრძეების ჯამი მეტი ან ტოლი იქნება $\frac{1}{2}$–ზე.

ამოხსნა

ავაგოთ A და B სიმრავლეები, რომლის ელემენტები იქნებიან მოცემული შუალედებიდან შერჩეული რომელიღაც შუალედები და შესრულდება პირობები:

1) A სიმრავლეში შემავალი შუალედები იქნება წყვილწყვილად თანაუკვეთი;
2) B სიმრავლეში შემავალი შუალედები იქნება წყვილწყვილად თანაუკვეთი;
3) A და B სიმრავლეებში შემავალი ყველა შუალედის გაერთიანება იქნება $[0; 1]$;

მაშინ ცხადია, რომ ან A სიმრავლეში შემავალი ყველა შუალედის სიგრძეების ჯამი იქნება მეტი ან ტოლი $\frac{1}{2}$–ზე, ან B სიმრავლეში შემავალი ყველა შუალედის სიგრძეების ჯამი იქნება მეტი ან ტოლი $\frac{1}{2}$–ზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ თითოეულ სიმრავლეში შემავალი ყველა შუალედის სიგრძეების ჯამი იქნება ნაკლები $\frac{1}{2}$–ზე, მაშინ ორივეში

ერთად შემავალი ყველა შუალედის სიგრძეების ჯამი იქნება ნაკლები 1–ზე, რაც ეწინააღმდეგება 3) პირობას.

შევარჩიოთ $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, $[a_3; b_3],...,[a_{2015}; b_{2015}]$ შუალედებიდან ის, რომლის მარცხენა ბოლო არის 0, ხოლო მარჯვენა ბოლო არის უდიდესი და ჩავაგდოთ ეს I_1 შუალედი A სიმრავლეში. შემდეგ დარჩენილი შუალედებიდან შევარჩიოთ ის, რომლის თანაკვეთაც I_1 შუალედთან არაცარიელია და აქვს უდიდესი მარჯვენა ბოლო. შერჩეული შუალედი I_2 ჩავაგდოთ B სიმრავლეში. შემდეგ დარჩენილი (ანუ I_1–ის და I_2–ის გარდა) შუალედებიდან შევარჩიოთ ის, რომლის თანაკვეთაც I_2 შუალედთან არაცარიელია და აქვს უდიდესი მარჯვენა ბოლო. ჩავაგდოთ ეს I_3 შუალედი A სიმრავლეში და ასე შემდეგ. პროცესი დავასრულოთ, როდესაც შერჩეული I_n შუალედის მარჯვენა ბოლო აღმოჩნდება რიცხვი 1. ამრიგად, I_1 შუალედის მარცხენა ბოლო არის 0, I_n შუალედის მარჯვენა ბოლო არის 1 და I_k შუალედის თანაკვეთა I_{k+1} შუალედთან არაცარიელია $(1 \le k \le n-1)$. ამიტომ $I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n = [0;1]$. ე. ი. 3) პირობა შესრულებულია.

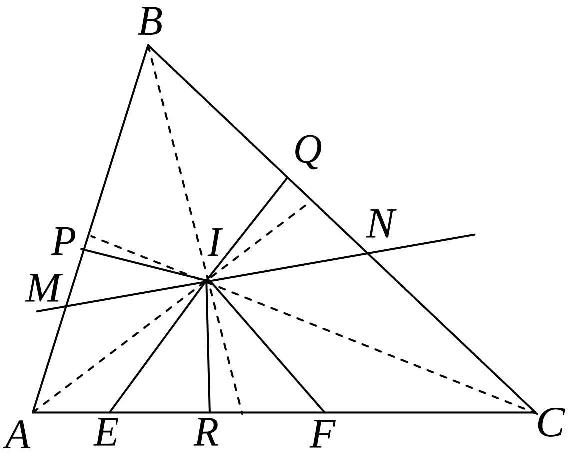
შევნიშნოთ, რომ თუ a არის I_k შუალედის მარჯვენა ბოლო, b არის I_{k+1} შუალედის მარჯვენა ბოლო და c არის I_{k+2} შუალედის მარჯვენა ბოლო, მაშინ $a < b < c$. მეორე მხრივ I_k და I_{k+2} შუალედები თანაუკვეთია, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში შესაბამის სიმრავლეში I_{k+1} შუალედის მაგივრად მოგვიხდებოდა უფრო დიდი მარჯვენა ბოლოს მქონე I_{k+2} შუალედის არჩევა. ვინაიდან I_k და I_{k+2} შუალედები ერთიდაიგივე სიმრავლეშია, ე. ი. 1) და 2) პუნქტებიც შესრულებულია.

ამრიგად, A და B სიმრავლეებისთვის შესრულებულია 1), 2) და 3) პირობები, რის გამოც როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, საძიებელი შუალედები იქნება ან A სიმრავლის ყველა შუალედი, ან B სიმრავლის ყველა შუალედი.

ამოცანა 4	5 ქულა

O არის ABC მახვილკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი. O წერტილზე გავლებულია წრფე, რომელიც AB და BC გვერდებს კვეთს შესაბამისად M და N წერტილებში ისე, რომ ΔMBN მახვილკუთხაა. AC გვერდზე აღებულია E და F წერტილები ისე, რომ $\angle BMO = \angle OFA$ და $\angle BNO = \angle OEC$. დაამტკიცეთ, რომ $AM + EF + NC = AC$.

ამოხსნა



I წერტილიდან სამკუთხედის გვერდებზე დავუშვათ IP, IQ და IR მართობები. ცხადია, რომ ვინაიდან I არის ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი, გვექნება: $AP = AR$ და $CQ = CR$. ახლა განვიხილოთ IQN და IRE მართკუთხა სამკუთხედები. ვინაიდან $IQ = IR$ და $\angle QNI = \angle IER$, ამიტომ $\Delta IQN = \Delta IRE$ კათეტითა და მოპირდაპირე მახვილი კუთხით. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან კი გვექნება, რომ $QN = ER$. ანალოგიურად, $\Delta IPM = \Delta IRF$, საიდანაც $PM = RF$. ამრიგად, გვაქვს:

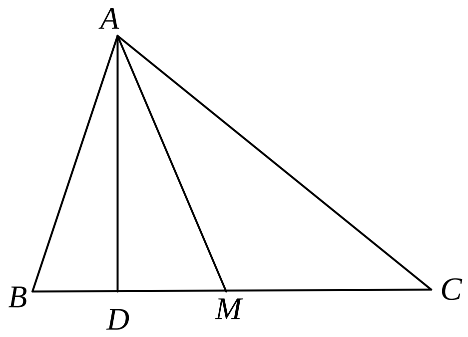
$$AC = AR + RC = AP + CQ = AM + MP + CN + NQ = AM + RF + CN + ER = AM + EF + CN.$$

დამტკიცება დასრულებულია.

ამოცანა 5 | 5 ქულა

ABC მახვილკუთხა სამკუთხედში $\angle B \geq 2\angle C$. D წერტილი არის A წვეროდან BC გვერდზე დაშვებული სიმაღლის ფუძე, ხოლო M არის BC გვერდის შუაწერტილი. დაამტკიცეთ, რომ $DM \geq \frac{AB}{2}$.

ამოხსნა



ვთქვათ $AB = c$, $BC = a$ და $AC = b$. გვაქვს:
$c^2 - BD^2 = b^2 - (a - BD)^2$, საიდანაც
$BD = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$. შესაბამისად
$DM = BM - BD = \frac{a}{2} - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a} = \frac{b^2 - c^2}{2a}$.

ამრიგად, უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\frac{b^2 - c^2}{2a} \geq \frac{c}{2}$.

კოსინუსების და სინუსების თეორემების გამოყენებით გვექნება:

$$\frac{b^2 - c^2}{2a} \geq \frac{c}{2} \Leftrightarrow b^2 - c^2 \geq ac \Leftrightarrow a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B - c^2 \geq ac \Leftrightarrow \frac{a}{c} \geq 1 + 2\cos\angle B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\angle B + \angle C)}{\sin\angle C} \geq 1 + 2\cos\angle B \Leftrightarrow \sin(\angle B + \angle C) \geq \sin\angle C + 2\sin\angle C\cos\angle B \Leftrightarrow \sin(\angle B - \angle C) \geq \sin\angle C.$$

ვინაიდან $\angle B \geq 2\angle C$, ამიტომ $\angle B - \angle C \geq \angle C$ და თუ გავითვალისწინებთ, რომ კუთხეები მახვილია, გვექნება $\sin(\angle B - \angle C) \geq \sin\angle C$, რაც, როგორც უკვე ვაჩვენეთ, ტოლფასია $DM \geq \frac{AB}{2}$ უტოლობის. დამტკიცება დასრულებულია.