ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა მათემატიკაში

II ტური

X კლასი

ამოცანა 1 — 5 ქულა

ცნობილია, რომ a, b და c დადებითი რიცხვები მოცემული თანმიმდევრობით ადგენენ ზრდად არითმეტიკულ პროგრესიას. აჩვენეთ, რომ თუ x_0 არის $ax^2+bx+c=0$ კვადრატული განტოლების ამონახსნი, მაშინ $x_0<-2$.

ამოცანა 2 — 5 ქულა

სიბრტყეზე მოცემულია ოთხი წერტილი $A(0;0), B(0,441), C(441,441)$ და $D(-441,0)$. აჩვენეთ, რომ არ არსებობს b და c მთელი რიცხვები, რომელთათვისაც $y=x^2+bx+c$ პარაბოლა კვეთს AC, BC, BD და DA წრფეებს ისე, რომ ყოველი გადაკვეთის წერტილის აბსცისა მთელი რიცხვი იქნება.

ამოცანა 3 — 5 ქულა

იპოვეთ $\dfrac{1}{p(p+1)}+\dfrac{1}{q(q+1)}$ გამოსახულების უმცირესი მნიშვნელობა, სადაც p და q დადებითი რიცხვებია, რომლებიც აკმაყოფილებს ტოლობას $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

ამოცანა 4 — 5 ქულა

$ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციის AD და BC ფუძეები შესაბამისად 8 და 4 ერთეულის ტოლია. A წვეროდან CD ფერდზე დაშვებული სიმაღლე ტრაპეციის შუახაზს შუაზე ყოფს. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

ამოცანა 5 — 5 ქულა

წრეწირის გარეთ აღებული A წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია ორი მხები და მკვეთი. მხებების წრეწირთან შეხების წერტილებია B და C. მხებებს შორის კუთხე 60°-ია. მკვეთის წრეწირთან გადაკვეთის წერტილებია M და N, ამასთან $AM<AN$. იპოვეთ MB და CN მონაკვეთების სიგრძეთა შეფარდება, თუ $\angle BAM<30^\circ$, ხოლო MB და CN წრფეები ერთმანეთის პარალელურია.

ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა მათემატიკაში

II ტური

XI-XII კლასი

ამოცანა 1 | 5 ქულა

ამოხსენით განტოლება

$$11[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=9x.$$

($[a]$ აღნიშნავს უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება a -ს).

ამოცანა 2 | 5 ქულა

იპოვეთ ყველა ისეთი ნატურალური რიცხვი k, რომლისთვისაც n^2+kn იქნება სრული კვადრატი რომელიმე n ნატურალური რიცხვისთვის.

ამოცანა 3 | 5 ქულა

ვთქვათ, a, b და c დადებითი ნამდვილი რიცხვებია. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{4a}{(a+b)^2+a(c-b)}+\frac{4b}{(b+c)^2+b(a-c)}+\frac{4c}{(c+a)^2+c(b-a)}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

ამოცანა 4 | 5 ქულა

ვთქვათ, O არის ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი, ხოლო ω არის წრეწირი, რომელიც ეხება BC, CA და AB წრფეებს შესაბამისად D, E და F წერტილებში, ამასთან A წერტილი და ω წრეწირი BC წრფის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს. დაამტკიცეთ, რომ თუ ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირისა და ω წრეწირის რადიუსები ტოლია, მაშინ OD წრფე მართობულია EF წრფის.

ამოცანა 5 | 5 ქულა

ამოზნექილი $ABCD$ ოთხკუთხედში $\angle CBD=\angle DBA$, $180^\circ-\angle ADC>\angle ABC$, ხოლო AD სხივი არის ABC სამკუთხედის A წვეროსთან მდებარე გარე კუთხის ბისექტრისა. გამოთვალეთ $\angle CDB+\angle CAD$.