ერთიანი ეროვნული გამოცდა მათემატიკაში 2020

ვარიანტი 1

პასუხები

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
დ	გ	გ	ბ	ა	ა	ა	დ	ბ	ა	გ	ბ	ბ	დ	გ

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ა	ბ	ა	ა	გ	დ	ბ	ბ	გ	დ	დ	ა	გ	დ	გ

ამოცანა 31 **2 ქულა**

ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 5x-4y=11 \end{cases}$$

ამოხსნა

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 5x-4y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3y+7}{2} \\ 5x-4y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3y+7}{2} \\ 5\cdot\dfrac{-3y+7}{2}-4y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3y+7}{2} \\ -15y+35-8y=22 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{-3y+7}{2} \\ y=\dfrac{13}{23} \end{cases}$$

საბოლოოდ მივიღებთ $x=\dfrac{61}{23}$, $y=\dfrac{13}{23}$.

პასუხი: $x=\dfrac{61}{23}$, $y=\dfrac{13}{23}$.

ამოცანა 32 **2 ქულა**

ღვინის მწარმოებელი ფირმა ღვინოს ყიდის პარტიებად შემდეგი წესით: x ბოთლისგან შედგენილი პარტიის ყიდვის შემთხვევაში, სადაც $x \le 4900$, თითოეული ბოთლი ღვინის ფასი იქნება $500-0,1x$ ლარი. სულ მცირე, რამდენი ბოთლი ღვინო იყიდა მყიდველმა, თუ მან თითოეულ ბოთლ ღვინოში 15 ლარზე ნაკლები გადაიხადა?

ამოხსნა

ვთქვათ მყიდველმა იყიდა x ბოთლი ღვინო, ამასთან თითოეულ ბოთლ ღვინოში 15 ლარზე ნაკლები გადაიხადა, მაშინ

$$500-0,1x<15 \Rightarrow x>4850.$$

პასუხი: 4851.

ამოცანა 33 **2 ქულა**

იპოვეთ ABC მართკუთხა სამკუთხედის უმცირესი კუთხის ტანგენსი, თუ $\angle ACB=90°$, $AB=2\sqrt{5}$ და $BC=4$.

ამოხსნა

პითაგორას თეორემის საშუალებით გამოვთვალოთ ABC მართკუთხა სამკუთხედის AC კათეტის სიგრძე $AC=\sqrt{20-16}=2$. რადგან $AC<BC$ ამიტომ სამკუთხედის უმცირესი კუთხეა $\angle B$. საბოლოოდ ვიღებთ $\operatorname{tg}(\angle B)=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{2}$.

პასუხი: $\frac{1}{2}$.

ამოცანა 34 **2 ქულა**

იპოვეთ x-ის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა, თუ 1; -3; 10; x; 5; 4 რიცხვითი მონაცემების გაბნევის დიაპაზონი 17-ის ტოლია.

ამოხსნა

თუ $-3 \le x \le 10$ მაშინ მონაცემების გაბნევის დიაპაზონი $10-(-3)=13$-ის ტოლია, რაც პირობას არ აკმაყოფილებს.

თუ $x<-3$ მაშინ პირობის თანახმად გვექნება $10-x=17 \Leftrightarrow x=-7$.

თუ $x>10$ მაშინ პირობის თანახმად გვექნება $x+3=17 \Leftrightarrow x=14$.

პასუხი: -7 და 14.

ამოცანა 35 **3 ქულა**

მოცემულია (a_n) არითმეტიკული პროგრესია, რომლის სხვაობა განსხვავებულია ნულისაგან. იპოვეთ ისეთი k და m ნომრები, რომ $k+m=13$ და $2a_k+a_3=a_m+2a_7$.

ამოხსნა

გვაქვს, $2(a_1+(k-1)d)+a_1+2d=a_1+(m-1)d+2(a_1+6d) \Leftrightarrow 3a_1+2kd=3a_1+(m+11)d \Leftrightarrow$ $2k=m+11 \Leftrightarrow 2k-m=11$.

მიღებულ ტოლობას მივუმატოთ პირობაში მოცემული $k+m=13$ ტოლობა. მივიღებთ $3k=24 \Leftrightarrow k=8$. მაშინ $m=5$.

პასუხი: $k=8$ და $m=5$.

ამოცანა 36 **3 ქულა**

$f(x)=a\cdot 3^{bx}$ ფუნქციის გრაფიკი გადის $(1;\,9)$ და $(2;\,16)$ წერტილებზე. იპოვეთ a და b პარამეტრების მნიშვნელობები.

ამოხსნა

რადგან $f(x)=a\cdot 3^{bx}$ ფუნქციის გრაფიკი გადის $(1;\,9)$ და $(2;\,16)$ წერტილებზე გვექნება:

$$\begin{cases} 9=a\cdot 3^{b} \\ 16=a\cdot 3^{2b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9=a\cdot 3^{b} \\ 3^{b}=\dfrac{16}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{9}{3^{b}} \\ b=\log_3\dfrac{16}{9} \end{cases}$$

. აქედან მივიღებთ:

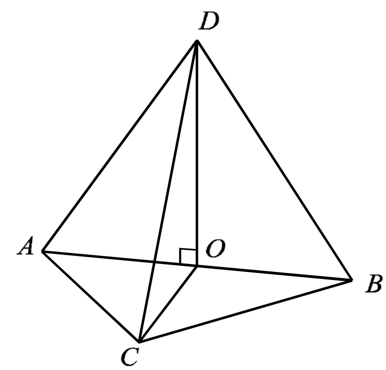
$a=\frac{81}{16}$, $b=\log_3\frac{16}{9}$.

პასუხი: $a=\frac{81}{16}$; $b=\log_3\frac{16}{9}$.

ამოცანა 37 **3 ქულა**

სამკუთხა პირამიდის ფუძე წარმოადგენს მართკუთხა სამკუთხედს, რომლის კათეტები ტოლია 3 სმ-ის და $\sqrt{3}$ სმ-ის. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი წიბოების მიერ ფუძის სიბრტყესთან შედგენილი კუთხეები, თუ ცნობილია, რომ ამ პირამიდის ყველა გვერდითი წიბოს სიგრძე 2 სმ-ის ტოლია.

ამოხსნა



შევნიშნოთ, რომ რადგან სამივე გვერდითი წიბო ერთმანეთის ტოლია, ამიტომ ისინი ფუძესთან ტოლ კუთხეებს ქმნის.

პირამიდის ფუძე აღვნიშნოთ ABC -თი, სადაც $AC=\sqrt{3}$ სმ $BC=3$ სმ და $\angle C=90°$. აქედან $AB=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$ სმ. პირამიდის D წვეროდან ფუძეზე დავუშვათ DO მართობი. $DA=DB=DC=2$ სმ, ამიტომ $AO=BO=CO=\frac{AB}{2}=\sqrt{3}$ სმ. და წიბოების მიერ ფუძის სიბრტყესთან შედგენილი კუთხეების კოსინუსი ტოლია $\cos\angle DAO=\frac{AO}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ხოლო კუთხეები უდრის $30°$.

პასუხი: პირამიდის გვერდითი წიბოების მიერ ფუძის სიბრტყესთან შედგენილი კუთხეები ტოლია $30°$.

ამოცანა 38 **4 ქულა**

ABC ტოლფერდა სამკუთხედის AC ფუძეზე აღებულია F წერტილი ისე, რომ მანძილი F წერტილიდან AB და BC წრფეებამდე შესაბამისად 1 სმ-ის და 5 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ AF მონაკვეთის სიგრძე, თუ ABC სამკუთხედის ფართობი $12\sqrt{3}$ სმ²-ის ტოლია, ხოლო $FC>6$ სმ-ზე.

ამოხსნა 1

რადგან $S_{ABC}=S_{ABF}+S_{FBC}=\frac{1}{2}AB\cdot 1+\frac{1}{2}BC\cdot 5=3AB=12\sqrt{3}$ საიდანაც $AB=4\sqrt{3}$.

მეორეს მხრივ $S=\frac{1}{2}AB^2\sin(\angle B)=8\cdot 3\sin(\angle B)=12\sqrt{3}$ საიდანაც მივიღებთ $\sin(\angle B)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

ანუ $B=60°$ ან $B=120°$. შესაბამისად, $AF=\frac{1}{\sin 60°}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ და $FC=\frac{5}{\sin 60°}=\frac{10}{\sqrt{3}}$ ან

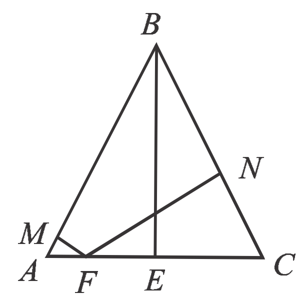
$AF=\frac{1}{\sin 30°}=2$ და $FC=\frac{5}{\sin 30°}=10$.

პასუხი: 2 სმ

ამოხსნა 2

ამოცანის პირობიდან და $\triangle AMF$ და $\triangle FNC$ სამკუთხედების მსგავსებიდან მივიღებთ, რომ

$AF=x$, $FC=5x$, და $AE=3x$, $BE=\frac{12\sqrt{3}}{3x}=\frac{4\sqrt{3}}{x}$.



რადგან $\frac{BE}{AB}=\frac{MF}{AF}$ ამიტომ $AB=4\sqrt{3}$.

$\triangle ABE$ -ში პითაგორას თეორემის თანახმად

$$(3x)^2+\left(\frac{4\sqrt{3}}{x}\right)^2=\left(4\sqrt{3}\right)^2$$

$$3x^4-16x^2+16=0$$

$$x^2=\frac{4}{3} \text{ ან } x^2=4.$$

შესაბამისად $AF=\frac{2}{\sqrt{3}}$ და $FC=\frac{10}{\sqrt{3}}$ ან $AF=2$ და $FC=10$.

პასუხი: 2 სმ

ამოცანა 39 **4 ქულა**

A პუნქტიდან B პუნქტებს შორის მანძილი 240 კილომეტრია. A პუნქტიდან B პუნქტის მიმართულებით მუდმივი სიჩქარით გაემართა ავტობუსი. 1 საათის შემდეგ B პუნქტიდან A პუნქტის მიმართულებით მუდმივი სიჩქარით გაემართა მსუბუქი ავტომობილი. ავტობუსი და მსუბუქი ავტომობილი ერთმანეთს A და B პუნქტების შემაერთებელი გზის შუაში შეხვდნენ. ამის შემდეგ, მათ შეუჩერებლად იმავე სიჩქარეებით გააგრძელეს გზა და როდესაც მათ შორის მანძილი 180 კმ გახდა, ავტობუსის გამოსვლიდან ზუსტად 3 საათი იყო გასული. იპოვეთ მსუბუქი ავტომობილის სიჩქარე.

ამოხსნა 1

დავუშვათ, მსუბუქი ავტომობილი საათში გადის u კილომეტრს, ხოლო ავტობუსი v კილომეტრს. შეხვედრის მომენტისთვის მსუბუქი ავტომობილი $\frac{120}{u}$ საათის განმავლობაში მოძრაობდა, ხოლო ავტობუსი მოძრაობდა $\frac{120}{v}$ საათის განმავლობაში, ამიტომ $\frac{120}{v}-\frac{120}{u}=1$. ავტობუსმა გამოსვლიდან 3 საათში გაიარა $3v$ კილომეტრი. ამ მომენტისათვის მსუბუქმა ავტომობილმა გაიარა $2u$ კილომეტრი. ამიტომ $2u+3v=420$. ვღებულობთ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} 120\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right)=1 \\ 2u+3v=420 \end{cases}$$

$u=210-\frac{3}{2}v$, $3v^2-1020v+240\cdot 210=0$, $v^2-340v+16800=0$, $u=120,\ v=60$. (ფესვი $v=280$ ამოცანის პირობას არ აკმაყოფილებს, რადგან ამ შემთხვევაში $2u+3v>420$).

პასუხი: 120კმ/სთ.

ამოხსნა 2

ვთქვათ, ავტობუსი და მსუბუქი ავტომობილი ერთმანეთს ავტობუსის გამოსვლიდან t საათის შემდეგ შეხვდნენ. მაშინ ავტობუსის სიჩქარეა $\frac{120}{t}$ კმ/სთ, ხოლო მსუბუქი ავტომობილის სიჩქარეა $\frac{120}{t-1}$ კმ/სთ. ავტობუსის გამოსვლიდან 3 საათის შემდეგ ავტობუსს გავლილი ჰქონდა $\frac{3\cdot 120}{t}$ კმ, ხოლო მსუბუქი ავტომობილს $\frac{2\cdot 120}{t-1}$ კმ. ვღებულობთ განტოლებას $\frac{3\cdot 120}{t}+\frac{2\cdot 120}{t-1}=420$. განტოლების გამარტივება გვაძლევს $7t^2-17t+6=0$, საიდანაც $t_1=2,\ t_2=\frac{3}{7}$. ამონახსნი $t=\frac{3}{7}$ ამოცანის პირობას არ აკმაყოფილებს (ამ შემთხვევაში მსუბუქი ავტომობილის სიჩქარეა $\frac{120}{t-1}=-210$ კმ/სთ). ამიტომ $t=2$. ვღებულობთ, რომ ავტობუსის სიჩქარეა $\frac{120}{t}=60$ კმ/სთ, ხოლო მსუბუქი ავტომობილის სიჩქარეა 120 კმ/სთ.

პასუხი: 120კმ/სთ.

ამოცანა 40 **4 ქულა**

სიბრტყეზე განვიხილოთ ყველა ტოლფერდა ტრაპეცია, რომელთა მახვილი კუთხეა α და ფართობია 10 სმ². ამ ტრაპეციების პერიმეტრებს შორის იპოვეთ უმცირესი, თუ $\sin\alpha = \frac{1}{5}$.

ამოხსნა

განვიხილოთ ერთ-ერთი ტრაპეცია, რომლის მახვილი კუთხეა α და ფართობი არის 10 სმ². ვთქვათ, ამ ტრაპეციის ფუძეებია a სმ და b სმ ($b < a$), ხოლო სიმაღლე h სმ. მაშინ,

$$10 = \frac{a+b}{2}h \Rightarrow a+b = \frac{20}{h}.$$

ტრაპეციის ფერდი ტოლია $\frac{h}{\sin\alpha} = 5h$ სმ. ამიტომ, ტრაპეციის პერიმეტრია

$$P(h) = \frac{2h}{\sin\alpha} + \frac{20}{h} = 10h + \frac{20}{h} \text{ სმ.}$$

თუ გამოვიყენებთ არაუარყოფითი რიცხვებისათვის ცნობილ უტოლობას $x + y \ge 2\sqrt{xy}$, რომელშიც ტოლობა მიიღწევა, როდესაც $x = y$, მივიღებთ:

$$P(h) = \frac{2h}{\sin\alpha} + \frac{20}{h} \ge 2\sqrt{\frac{2h}{\sin\alpha}\cdot\frac{20}{h}} = 4\sqrt{\frac{10}{\sin\alpha}} = 20\sqrt{2} \text{ სმ.}$$

ამ უტოლობაში ტოლობა მიიღწევა, როდესაც $\frac{2h}{\sin\alpha} = \frac{20}{h}$, ანუ $h = \sqrt{10\sin\alpha} = \sqrt{2}$.

შევამოწმოთ, რომ ამ მონაცემების მქონე ტრაპეცია მართლაც არსებობს. მართლაც, ავიღოთ $h = \sqrt{2}$, მაშინ ფერდის სიგრძე იქნება $\frac{h}{\sin\alpha} = 5\sqrt{2}$ და ვღებულობთ:

$$\begin{cases} a+b = 10\sqrt{2} \\ a-b = 8\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow a = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3},\ b = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ტოლფერდა ტრაპეცია ფუძეებით $a = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ სმ, $b = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$ სმ და სიმაღლით $h = \sqrt{2}$ სმ აკმაყოფილებს ამოცანის ყველა პირობას და მისი პერიმეტრია $20\sqrt{2}$ სმ.

მაშასადამე, პერიმეტრის უმცირესი მნიშვნელობაა $20\sqrt{2}$ სმ.

პასუხი: $20\sqrt{2}$ სმ.