ერთიანი ეროვნული გამოცდა მათემატიკაში 2020

ვარიანტი 2

პასუხები

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ა	ბ	გ	ა	დ	ა	გ	დ	გ	ბ	ა	ბ	დ	ბ	ა

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
დ	გ	ბ	ბ	გ	ბ	გ	ა	დ	დ	გ	ა	ბ	ა	გ

ამოცანა 31 — 2 ქულა

ამოხსენით უტოლობათა სისტემა

$$\begin{cases} 2(x-1)+3 \le 8 \\ 5x-4 \ge 13 \end{cases}$$

ამოხსნა

$$\begin{cases} 2(x-1)+3 \le 8 \\ 5x-4 \ge 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \le 7 \\ 5x \ge 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{7}{2} \\ x \ge \frac{17}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{17}{5} \le x \le \frac{7}{2}$$

პასუხი: $\frac{17}{5} \le x \le \frac{7}{2}$.

ამოცანა 32 — 2 ქულა

ატელიეს n ცალი პერანგის შეკერვა უჯდება $13000+30n$ ლარი. ატელიე ერთ პერანგს ყიდის 60 ლარად. რა უმცირესი რაოდენობის პერანგი უნდა გაყიდოს ატელიემ, რომ მთლიანად დაფაროს ხარჯი და მოგების სახით დარჩეს არანაკლებ 6000 ლარი? ჩათვალეთ, რომ ატელიეს მითითებულის გარდა სხვა სახის დანახარჯი არ აქვს.

ამოხსნა

ვთქვათ ატელიემ უნდა გაყიდოს n ცალი პერანგი. მაშინ, ატელიეს შემოსავალი იქნება $60n$ ლარი. ამ თანხით ატელიემ უნდა დაფაროს $13000+30n$ ლარის ტოლი დანახარჯი და მოგების სახით დარჩეს არანაკლებ 6000 ლარი. ე.ი.

$$60n-(13000+30n) \ge 6000 \Rightarrow 30n \ge 19000 \Rightarrow n \ge 633\frac{1}{3}.$$

პასუხი: 634.

ამოცანა 33 **2 ქულა**

იპოვეთ ABC მართკუთხა სამკუთხედის უმცირესი კუთხის სინუსი, თუ $\angle C = 90°$, $AC = 2\sqrt{3}$ და $BC = 3$.

ამოხსნა

პითაგორას თეორემის საშუალებით გამოვთვალოთ ABC მართკუთხა სამკუთხედის AB ჰიპოტენუზის სიგრძე $AB = \sqrt{12+9} = \sqrt{21}$. რადგან $AC > BC$ ამიტომსამკუთხედის უმცირესი კუთხეა $\angle A$. საბოლოოდ ვიღებთ $\sin(\angle A) = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

პასუხი $\sqrt{\frac{3}{7}}$

ამოცანა 34 **2 ქულა**

იპოვეთ x-ის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა, თუ $1; -7; 13; x; 9; 4$ რიცხვითი მონაცემების გაბნევის დიაპაზონი 23-ის ტოლია.

ამოხსნა

თუ $-7 \le x \le 13$, მაშინ მონაცემების გაბნევის დიაპაზონი $13-(-7) = 20$ -ის ტოლია, რაც პირობას არ აკმაყოფილებს.

თუ $x < -7$, მაშინ პირობის თანახმად გვექნება $13 - x = 23 \Leftrightarrow x = -10$.

თუ $x > 13$, მაშინ პირობის თანახმად გვექნება $x-(-7) = 23 \Leftrightarrow x = 16$.

პასუხი: -10 და 16.

ამოცანა 35 **3 ქულა**

მოცემულია (b_n) გეომეტრიული პროგრესია, რომლის პირველი წევრი განსხვავებულია ნულისგან, მნიშვნელის მოდული კი განსხვავებულია 1-საგან. იპოვეთ k და m, თუ $k+m=20$ და $b_9 \cdot b_k^2 = b_5^2 \cdot b_m$.

ამოხსნა

გვაქვს $b_1 \cdot q^8 \cdot b_1^2 \cdot q^{2k-2} = b_1^2 \cdot q^8 \cdot b_1 \cdot q^{m-1} \Leftrightarrow q^{2k-2} = q^{m-1} \Leftrightarrow 2k - m = 1$.
მიღებულ ტოლობას მივუმატოთ პირობაში მოცემული $k+m=20$ ტოლობა. მივიღებთ
$3k = 21 \Leftrightarrow k = 7$. მაშინ $m = 13$.

პასუხი: $k = 7$ და $m = 13$.

ამოცანა 36 **3 ქულა**

$f(x) = a \cdot \log_3(bx)$ ფუნქციის გრაფიკი გადის $(2; 0)$ და $(18; 17)$ წერტილებზე. იპოვეთ a და b პარამეტრების მნიშვნელობები.

ამოხსნა

რადგან $f(x) = a \cdot \log_3(bx)$ ფუნქციის გრაფიკი გადის $(2; 0)$ და $(18; 17)$ წერტილებზე გვექნება

$$\begin{cases} a \cdot \log_3(2b) = 0 \\ a \cdot \log_3(18b) = 17 \end{cases},$$ აქედან მივიღებთ

$a = 0$ ან $\log_3(2b) = 0$. მივიღეთ $a = 0$ ან $b = \frac{1}{2}$, მაგრამ რადგან $a \cdot \log_3(18b) = 17$ ამიტომ $a \neq 0$,

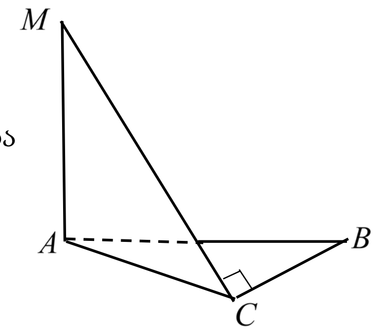
ე.ი. $b = \frac{1}{2}$, მაშინ $a \cdot \log_3 9 = 17$. აქედან $a = \frac{17}{2}$.

პასუხი: $a = \frac{17}{2}$; $b = \frac{1}{2}$.

ამოცანა 37 **3 ქულა**

ABC მართკუთხა სამკუთხედის AB ჰიპოტენუზის სიგრძე 4 სმ-ია, ხოლო $\angle ABC = 60°$. A მახვილი კუთხის წვეროდან ABC სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია AM მართობი, რომლის სიგრძეა 6 სმ. იპოვეთ M წერტილიდან BC წრფისადმი გავლებული მართობის მიერ ACB სიბრტყესთან შედგენილი კუთხის ტანგენსი.

ამოხსნა



M წერტილი შევაერთოთ C წერტილთან. შევნიშნოთ, რომ MC წრფის გეგმილი ACB სიბრტყეში იქნება AC წრფე. ვინაიდან $AC \perp CB$, ამიტომ $MC \perp CB$. მაშასადამე M წერტილიდან BC წრფისადმი გავლებული მართობი იქნება MC და ის ACB სიბრტყესთან შეადგენს MCA კუთხეს.

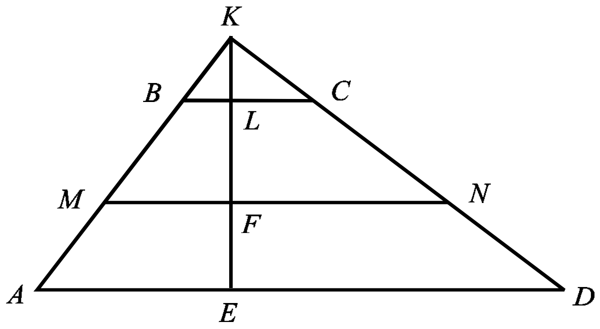
გვაქვს: $AC = AB \sin 60° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. ΔMAC არის მართკუთხა A მართი კუთხით, ამიტომ $\operatorname{tg} \angle MCA = \frac{MA}{AC} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

პასუხი: $\sqrt{3}$.

ამოცანა 38 **4 ქულა**

$ABCD$ ტრაპეციის ფუძეებია AD და BC, მისი სიმაღლეა 12 სმ, ხოლო $AD:BC=5:1$. ტრაპეციაში გავლებულია ფუძეების პარალელური წრფე, რომელიც AB და CD ფერდებს კვეთს შესაბამისად M და N წერტილებში. ცნობილია, რომ $MN=2BC$, ხოლო $AMND$ ოთხკუთხედის ფართობი არის 21 სმ^2. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები.

ამოხსნა 1



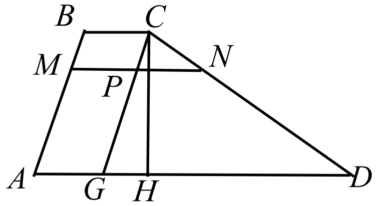
გავაგრძელოთ AB და CD ფერდები K წერტილში გადაკვეთამდე. K წერტილიდან AD ფუძეზე დავუშვათ KE სიმაღლე, რომელიც BC და MN მონაკვეთებს შესაბამისად L და F წერტილებში კვეთს.

ვთქვათ $AD=5x$ და $BC=x$. მაშინ $MN=2x$.

BKC და AKD სამკუთხედების მსგავსებიდან გვექნება $\frac{BC}{AD}=\frac{KL}{KE}\Rightarrow\frac{x}{5x}=\frac{KL}{KL+12}\Rightarrow KL=3$.

BC მონაკვეთი MKN სამკუთხედში იქნება შუახაზი, ამიტომ $KL=LF=3$. მაშინ $FE=9$. გვაქვს

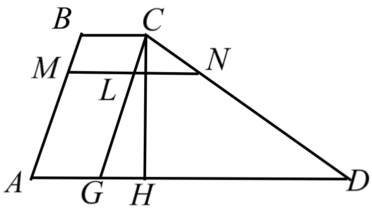
$S_{AMND}=\frac{AD+MN}{2}\cdot EF \;\Rightarrow\; \frac{2x+5x}{2}\cdot 9=21\Rightarrow x=\frac{2}{3}$.



ამრიგად $AD=\frac{10}{3}$ და $BC=\frac{2}{3}$.

პასუხი: $\frac{10}{3}$ სმ და $\frac{2}{3}$ სმ.

ამოხსნა 2



C წერტილზე გავავლოთ AB მონაკვეთის პარალელური CG მონაკვეთი და CH სიმაღლე. ვთქვათ $AD=5x$ და $BC=x$. მაშინ $ML=LN=AG=x$ და $GD=4x$. CLN და CGD სამკუთხედების მსგავსებიდან გვექნება $\frac{CL}{CG}=\frac{LN}{GD}=\frac{1}{4}$.

ამიტომ $\frac{S_{MBCL}}{S_{AMLG}}=\frac{CL}{LG}=\frac{1}{3}$, $\frac{S_{CLN}}{S_{GLND}}=\frac{1}{15}$ და $S_{MBCL}=2S_{CLN}$. მაშასადამე,

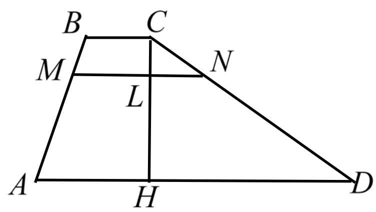
$S_{AMND}=S_{AMLG}+S_{GLND}=3S_{MBCL}+15S_{CLN}=6S_{CLN}+15S_{CLN}=21S_{CLN}=21\Rightarrow S_{CLN}=1$.

$S_{ABCD}=21+2+1=24=\frac{5x+x}{2}\cdot 12\Rightarrow x=\frac{2}{3}$. ამრიგად $AD=\frac{10}{3}$ და $BC=\frac{2}{3}$.

პასუხი: $\frac{10}{3}$ **და** $\frac{2}{3}$.

ამოხსნა 3

ვთქვათ $BC=x$, $CL=h_1$ და $LH=h_2$. მაშინ $AD=5x$, $MN=2x$ და $h_1+h_2=12$. გვაქვს



$S_{ABCD}=\frac{x+5x}{2}\cdot CH=3x\cdot 12=36x$;

$S_{AMND}=\frac{2x+5x}{2}\cdot LH=\frac{7xh_2}{2}=21$;

$S_{MBCN}=\frac{2x+x}{2}\cdot CL=\frac{3xh_1}{2}=\frac{3x(12-h_2)}{2}$.

ცხადია, რომ $S_{ABCD}=S_{AMND}+S_{MBCN}\Leftrightarrow 21+\frac{3x(12-h_2)}{2}=36x$. მივიღეთ სისტემა:

$$\begin{cases}21+\frac{3x(12-h_2)}{2}=36x\\ \frac{7xh_2}{2}=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}21+18x-\frac{3xh_2}{2}=36x\\ xh_2=6\end{cases}\Rightarrow 21+18x-9=36x\Rightarrow x=\frac{2}{3}.$$

ამრიგად, $AD=\frac{10}{3}$ და $BC=\frac{2}{3}$.

პასუხი: $\frac{10}{3}$ და $\frac{2}{3}$.

ამოცანა 39 **4 ქულა**

A და B ნაკვეთებს ტოლი ფართობები აქვს. პირველი ბრიგადა ამუშავებს A ნაკვეთს, ხოლო მეორე ბრიგადა - B ნაკვეთს. თითოეული ბრიგადა მუდმივი სიჩქარით მუშაობს. მეორე ბრიგადამ მუშაობა პირველ ბრიგადასთან შედარებით 1 საათით გვიან დაიწყო. თითოეულმა ბრიგადამ თავიანთი ნაკვეთების პირველი ოთხი ჰექტრის დამუშავება დროის ერთსა და იმავე მომენტში დაასრულა. მეორე ბრიგადამ თავისი ნაკვეთის დამუშავება მუშაობის დაწყებიდან 9 საათში დაამთავრა, ამ მომენტისთვის კი პირველ ბრიგადას კიდევ 1 ჰექტარი დარჩა დასამუშავებელი. იპოვეთ ნაკვეთების ფართობები.

ამოხსნა 1

თუ პირველი ბრიგადა საათში x ჰექტარს ამუშავებს, ხოლო მეორე ბრიგადა y ჰექტარს, მაშინ 4 ჰექტარს პირველი ბრიგადა $\frac{4}{x}$ საათში დაამუშავებს, ხოლო მეორე ბრიგადა $\frac{4}{y}$ საათში. ვღებულობთ განტოლებას $\frac{4}{x}-\frac{4}{y}=1$. მუშაობის დაწყებიდან 9 საათის შემდეგ მეორე ბრიგადას დამუშავებული ჰქონდა $9y$ ჰექტარი ფართობი, ხოლო პირველ ბრიგადას ამ დროისათვის $10x$ ჰექტარი ფართობი. ამიტომ $9y-10x=1$. ვღებულობთ სისტემას

$$\begin{cases}\frac{4}{x}-\frac{4}{y}=1\\ 9y-10x=1\end{cases}$$

საიდანაც ვღებულობთ განტოლებას $9y^2-5y-4=0$. ამ განტოლების ამოხსნა გვაძლევს $y=1$, მაშინ თითოეული ნაკვეთის ფართობი ტოლია $9y=9$ ჰა.

პასუხი. 9 ჰა.

ამოხსნა 2

ვთქვათ პირველი ოთხი ჰექტრის დამუშავებას პირველმა ბრიგადამ t საათი მოანდომა. მაშინ მეორე ბრიგადამ იგივე ფართობი $t-1$ საათში დაამუშავა. ამიტომ 1 ჰექტრის დამუშავებას პირველი ბრიგადა $\frac{t}{4}$, ხოლო მეორე ბრიგადა $\frac{t-1}{4}$ საათს ანდომებს. მეორე ბრიგადამ 9 საათში $\frac{9\cdot 4}{t-1}$ ჰექტარი დაამუშავა,

ხოლო პირველმა ბრიგადამ 10 საათში დაამუშავა $\frac{10\cdot 4}{t}$ ჰექტარი. ამოცანის პირობის თანახმად $\frac{36}{t-1}-\frac{40}{t}=1$. განტოლების ამოხსნა გვაძლევს $t^2+3t-40=0$, $t_1=5,\ t_2=-8$. ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს მხოლოდ ამონახსნი $t=5$. ამ შემთხვევაში თითოეული ნაკვეთის ფართობია $\frac{9\cdot 4}{5-1}=9$ ჰა.

ამოხსნა 3

ვთქვათ თითოეული ნაკვეთის ფართობია x ჰა. მაშინ, რადგან მეორე ბრიგადამ 9 სთ-ში დაასრულა თავისი ნაკვეთის დამუშავება, მისი მუშაობის სიჩქარეა $\frac{x}{9}$ ჰა/სთ. ამოცანის პირობის თანახმად პირველმა ბრიგადამ 10 საათში დაამუშავა $(x-1)$ ჰა, ე.ი. მისი მუშაობის სიჩქარე ყოფილა $\frac{x-1}{10}$ ჰა/სთ. მაშინ 4ჰა-ს პირველი ბრიგადა დაამუშავებდა $\frac{4}{\frac{x-1}{10}}$ სთ-ში, ხოლო მეორე $\frac{4}{\frac{x}{9}}$ სთ-ში. ამოცანის პირობის თანახმად ვწერთ განტოლებას:

$$\frac{4}{\frac{x-1}{10}}=\frac{4}{\frac{x}{9}}+1 \quad .$$

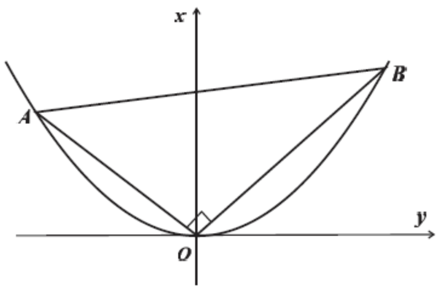
განტოლების გამარტივების შედეგად მივიღებთ: $x^2-5x-36=0 \Rightarrow x_1=9;\ x_2=-4$.

პასუხი: 9ჰა.

ამოცანა 40 **4 ქულა**

Oxy საკოორდინატო სიბრტყეში განვიხილოთ ყველა AOB მართკუთხა სამკუთხედი, რომელთა მართი კუთხის წვერო მდებარეობს საკოორდინატო სიბრტყის სათავეში, ხოლო A და B წვეროები მდებარეობს $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{31}}$ ფუნქციის გრაფიკზე. იპოვეთ ამ სამკუთხედების ფართობებს შორის უმცირესი.

ამოხსნა



განვიხილოთ ნებისმიერი AOB მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის მართი კუთხე მდებარეობს საკოორდინატო სიბრტყის სათავეში, ხოლო $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{\sqrt{31}}\right)$ და $B\left(x_2,\frac{x_2^2}{\sqrt{31}}\right)$ წვეროები მდებარეობს $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{31}}$ ფუნქციის გრაფიკზე, ამასთან, $x_1<0$, ხოლო $x_2>0$.

რადგან $\overrightarrow{OA}$ და $\overrightarrow{OB}$ ურთიერთმართობულივექტორებია, გვაქვს $x_1x_2+\frac{x_1^2x_2^2}{31}=0 \Rightarrow x_1x_2=-31$. AOB მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი ტოლია

$$S(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+\frac{x_1^4}{31}}\cdot\sqrt{x_2^2+\frac{x_2^4}{31}}=\frac{1}{2}|x_1||x_2|\sqrt{1+\frac{x_1^2}{31}}\cdot\sqrt{1+\frac{x_2^2}{31}}=$$

$$=\frac{31}{2}\sqrt{1+\frac{x_1^2+x_2^2}{31}+\frac{x_1^2x_2^2}{31^2}}=\frac{31}{2}\sqrt{2+\frac{x_1^2+x_2^2}{31}}\ .$$

თუ გამოვიყენებთ უტოლობას $x_1^2 + x_2^2 \ge 2|x_1||x_2| = 62$, რომელშიც ტოლობა მიიღწევა, როდესაც $|x_1| = |x_2|$, მივიღებთ $S(x_1, x_2) \ge \frac{31}{2}\sqrt{2 + \frac{2|x_1|\cdot|x_2|}{31}} = \frac{31}{2}\sqrt{2+2} = 31$.

ე.ი. $S(x_1, x_2)$ ფუნქცია ქვემოდან შემოსაზღვრულია 31-ით.ამასთან, როდესაც $x_2 = -x_1 = \sqrt{31}$, $S(x_1, x_2)$ ფუნქცია იღებს თავის უმცირეს მნიშვნელობას და ის ტოლია 31-ის. შესაბამისი მართკუთხა სამკუთხედის წვეროებია $A\left(-\sqrt{31}; \sqrt{31}\right)$ და $B\left(\sqrt{31}; \sqrt{31}\right)$.

პასუხი: 31.