ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა მათემატიკაში
2019-20 სასწავლო წელი
II ტური X კლასი

ამოცანა 1 5 ქულა

იპოვეთ ყველა ის ნატურალური რიცხვი n, რომელთათვისაც ქვემოთ მოყვანილი წინადადებებიდან მხოლოდ ორია ჭეშმარიტი:
ა) $n+20$ რაიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატია;
ბ) n რიცხვის ბოლო ციფრი 2 -ის ტოლია;
გ) $n-69$ რაიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატია.

ამოხსნა

შევნიშნოთ, რომ თუ მეორე წინადადება ჭეშმარიტია, მაშინ პირველი და მესამე წინადადება მცადარია, ვინაიდან ნატურალური რიცხვის კვადრატი ვერ დაბოლოვდება ციფრებით 2 ან 3. ვიგულისხმოთ, რომ სამართლიანია პირველი და მესამე წინადადება. გვაქვს
$n+20=a^2, n-69=b^2$, სადაც a და b ნატურალური რიცხვებია. მიღებული ტოლობების გამოკლებით მივიღებთ განტოლებას $a^2-b^2=(a-b)(a+b)=89=89\cdot 1.$ თუ გავითვალისწინებთ $a>b>0$ პირობებს მივიღებთ, რომ $a=45, b=44.$ საბოლოოდ მივიღებთ $n=45^2-20=2025-20=2005.$

პასუხი: 2005

ამოცანა 2 5 ქულა

ვთქვათ n ნატურალური რიცხვია. ცნობილია, რომ $|x-2n|=a\sqrt{x}$ განტოლებას $(2n-1, 2n+1]$ შუალედში გააჩნია ორი განსხვავებული ფესვი (x ცვლადის მიმართ). აჩვენეთ, რომ

$$0<a\le\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

ამოხსნა

შევნშნოთ, რომ თუ $|x-2n|=a\sqrt{x}$ განტოლებას ამონახსნი გააჩნია, მაშინ $a\ge 0$. როცა $a=0$ მოცემულ განტოლებას მხოლოდ ერთი ამონახსნი აქვს. განტოლების ორივე მხარის კადრატში აყვანის შემდეგ მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას

$$x^2-(4n+a^2)x+4n^2=0.$$

თუ მიღებულ განტოლებას გააჩნია 2 გასხვავებული ამონახსნი $(2n-1, 2n+1]$ შუალედში, მაშინ სამართლიანია უტოლობები

$$(2n-1)^2-(4n+a^2)(2n-1)+4n^2>0, \ (1)$$
$$(2n+1)^2-(4n+a^2)(2n-1)+4n^2\geq 0. \ (2)$$

(1) და (2) უტოლობიდან შეგვიძლია მივიღოთ შესაბამისად უტოლობები $a<\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ და $a\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. საბოლოოდ გვექნება

$$0<a\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

ამოცანა 3 **5 ქულა**

ვთქვათ a_n , $n=1,2,3,...$ აღნიშნავს სიბრტყეზე ყველა იმ წერტილთა რაოდენობას, რომელთა ორივე კოორდინატი XOY მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ნატურალური რიცხვებია და ეკუთვნიან მონაკვეთს, რომლის ბოლოების კოორდინატებია $(0,0)$ და $(n,n+3)$ ($(0,0)$ და $(n,n+3)$ წერტილები არ გაითვალისწინოთ). იპოვეთ

$$a_1+a_2+...+a_{2020}.$$

ამოხსნა

თუ n არ არის 3-ის ჯერადი. მაშინ n და $n+3$ ურთიერთმარტივი რიცხვებია. ვთქვათ წერტილი კორდინატებით (k,l), სადაც k და l ნატურალური რიცხვებია ძევს მონაკვეთზე ბოლოებით $(0,0)$ და $(n,n+3)$ წერტილებში. მაშინ გვექნება

$$\frac{n}{n+3}=\frac{k}{l}, \qquad (1)$$

ანუ $k(n+3)=nl$ განტოლება. ამ უკანასკნელი ტოლობიდან დავასკვნით, რომ n ყოფს k -ს და ამიტომ (k,l) წერტილი ვერ იქნება $(0,0)$ და $(n,n+3)$ წერტილებს შორის.
დაუშვათ $n=3m$, სადაც m რაიმე ნატურალური რიცხვია. მაშინ (1) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\frac{n}{n+3}=\frac{3m}{3m+3}=\frac{m}{m+1}=\frac{k}{l}.$$

ვინაიდან m და $m+1$ ურთიერთმარტივი რიცხვებია, ამიტომ $\frac{m}{m+1}=\frac{k}{l}$ ტოლობიდან დავასკვნით, რომ $\frac{k}{l}=\frac{m}{m+1}=\frac{2m}{2(m+1)}=\frac{3m}{3(m+1)}=....$

წერტილები კორდინატებით $(m, m+1)$ და $(2m, 2(m+1))$ საძიებელი წერტილებია; ისინი ძევს მონაკვეთზე ბოლოებით $(0,0)$ და $(n, n+3) = (3m, 3(m+1))$. $\dfrac{m}{m+1} = \dfrac{k}{l}$ ტოლობის გამო არცეთი სხვა წერტილი მთელი კოეფივიენტებით არ ძევს მოცემულ მონაკვეთზე.

საბოლოოდ გვექნება, რომ

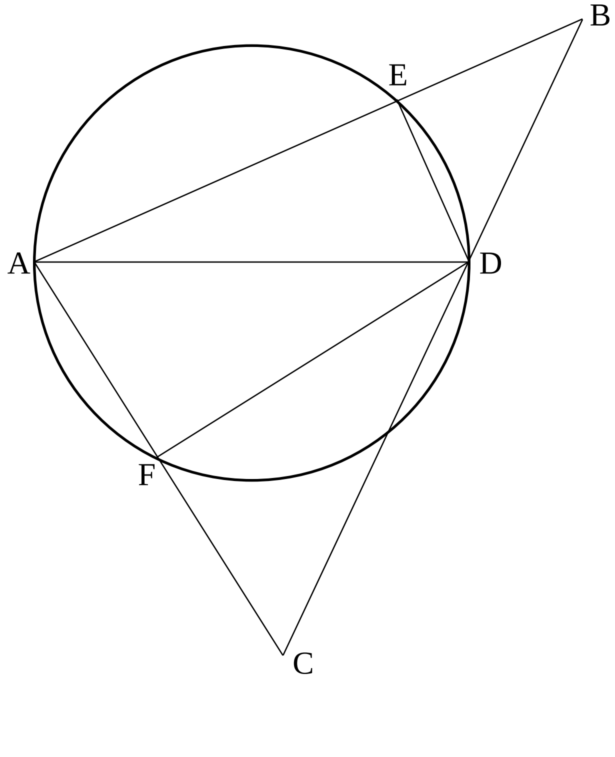
$$a_1 + a_2 + ... + a_{2020} = 2 \cdot \left[\frac{2020}{3} \right] = 2 \cdot 673 = 1346.$$

პასუხი: 1346

ამოცანა 4 5 ქულა

წრეწირი, რომლის დიამეტრი ABC სამკუთხედის AD ბისექტრისაა, AB და AC გვერდებს კვეთს შესაბამისად E და F წერტილებში. იპოვეთ AD ბისექტრისის სიგრძე, თუ ABC სამკუთხედის ფართობი ტოლია $\dfrac{7\sqrt{35}}{12}$-ის, ხოლო $AE : EB = 2:1$ და $AF : FC = 1:1$.

ამოხსნა



შევნიშნოთ, რომ DE და DF შესაბამისად ABD და ADC სამკუთხედების სიმაღლეებია და $DE = DF$. . გვაქვს $AF = FC = 2x, AE = 2x, EB = x.$ აგრეთვე $BD:CD = 3:4$ ანუ $DC = 4y, BD = 3y.$ შევნიშნოთ, რომ ADC სამკუთხედი ტოლფერდაა და $AD = 4y.$ BDE და AED მართკუთხა სამკუთხედებიდან გვექნება ტოლობა $9y^2 - x^2 = 16y^2 - 4x^2$, საიდანაც გვექნება $x^2 = 7y^2/3.$
DE და DF სიმაღლეებისათვის გვექნება

$$DE^2 = 9y^2 - \frac{7}{3}y^2 = \frac{20}{3}y^2.$$

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} = \frac{1}{2}\cdot 3x\cdot DE + \frac{1}{2}\cdot 4x\cdot DF = \frac{7}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}y\sqrt{\frac{20}{3}}y = \frac{7\sqrt{35}}{3}y^2,$$

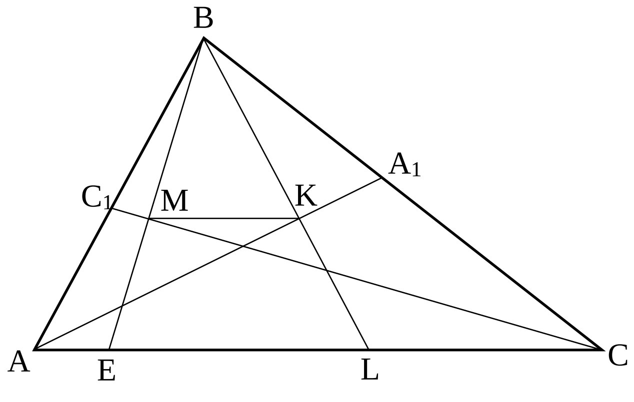
საიდანაც მივიღებთ $y = 1/2$ და მაშასადამე $AD = 4y = 2.$

პასუხი: 2.

ამოცანა 5 — 5 ქულა

ABC სამკუთხედში გავლებულია AA_1 და CC_1 ბისექტრისები. K და M წერტილები შესაბამისად B წერტილიდან AA_1 და CC_1 წრფეებზე დაშვებული პერპენდიკულარების ფუძეებია. იპოვეთ KBM სამკუთხედის ფართობის შეფარდება ABC სამკუთხედის ფართობთან, თუ $AC = 15, BC = 14$ და $AB = 13$.

ამოხსნა



ვთქვათ L და E წერტილები შესაბამისად BK და BM წრფეების AC წრფესთან გადაკვეთის წერტილებია. ვინაიდან EBC და ABL სამკუთხედებში შესაბამისად A და C წვეროებიდან გავლებული ბისექტრისები ამავე დროს სიმაღლეებიცაა, ამიტომ ისინი

ტოლფერდა სამკუთხედებია. გვაქვს $EC = BC = 14$ და $AL = AB = 13$, აგრეთვე $AE = 1, LC = 2$ და $EL = 12$. MK EBL სამკუთხედის შუახაზია. გვაქვს $S_{BMK} : S_{EBL} = 1:4.$ ამავე დროს $S_{EBL} : S_{ABC} = 12:15 = 4:5.$ მაშასადამე საძიებელი ფარდობა ტოლია $S_{BML} : S_{ABC} = 1:5.$

პასუხი: $S_{BML} : S_{ABC} = 1:5.$

ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა მათემატიკაში
2019-20 სასწავლო წელი
II ტური XI-XII კლასი

ამოცანა 1 **5 ქულა**

ვთქვათ a და b არიან 4-ზე მეტი ნამდვილი რიცხვები. დაამტკიცეთ, რომ $x^2+ax+b=0$ და $x^2+bx+a=0$ განტოლებებიდან ერთს მაინც აქვს ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნამდვილი ფესვი.

ამოხსნა

დავუშვათ საწინააღმდეგო, არცერთ განტოლებას არ აქვს ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნამდვილი ფესვი. მაშინ რადგან a და b არიან 4-ზე მეტი ნამდვილი რიცხვები, გვექნება $a^2-4b\le 0$ და $b^2-4a\le 0$. აქედან

$$a^2\le 4b,\ b^2\le 4a \Rightarrow a^2b^2\le 16ab \Rightarrow ab\le 16.$$

პირობის თანახმად კი უნდა გვქონდეს $ab>16$. დაშვება არასწორია. ამრიგად. განტოლებებიდან ერთს მაინც აქვს ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნამდვილი ფესვი.

ამოცანა 2 **5 ქულა**

k ცალი ერთმანეთის მომდევნო ნატურალური რიცხვის ჯამი არის 2020-ის ტოლი. იპოვეთ k-ს ყველა შესაძლო მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ ის არის ერთზე მეტი კენტი ნატურალური რიცხვი.

ამოხსნა

ვთქვათ პირველი ნატურალური რიცხვი არის $n+1$, სადაც n არაუარყოფითი მთელი რიცხვია. მაშინ გვექნება რიცხვები $n+1, n+2, \dots, n+k$. მაშინ

$$(n+1)+(n+2)+\dots+(n+k)=\frac{2n+k+1}{2}\cdot k=(n+\frac{k+1}{2})\cdot k=2020=4\cdot 5\cdot 101.$$

ვინაიდან k არის კენტი, ამიტომ $n+\frac{k+1}{2}$ არის მთელი, ე. ი k არის ან 5, ან 101 ან 505. შემოწმება გვიჩვენებს, რომ შესაძლებელია მხოლოდ $k=5$.

პასუხი: $k=5$.

ამოცანა 3 5 ქულა

ნინიკომ 30 დღის განმავლობაში შეჭამა 48 კანფეტი ისე, რომ ყოველდღიურად მიირთმევდა არანაკლებ ერთ და არაუმეტეს 10 კანფეტს. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ერთმანეთის მომდევნო რამდენიმე (არანაკლებ ორი) დღე, რომელთა განმავლობაში ნინიკომ მიირთვა ჯამურად ზუსტად 11 კანფეტი.

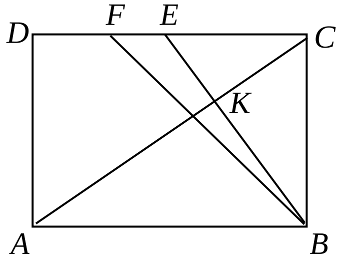
ამოხსნა

ვთქვათ ნინიკომ პირველ დღეს მიირთვა x_1 რაოდენობით კანფეტი, მეორე დღეს x_2 და ა. შ. 30-ე დღეს x_{30}. ვთქვათ S_k არის პირველიდან k-ურ დღემდე (ჩათვლით) შეჭმული კანფეტების რაოდენობა, ე.ი. $S_k = x_1 + x_2 + ... + x_k, \quad k = 1, 2, ..., 30$. ცხადია, რომ $0 < S_1 < S_2 < ... < S_{30} = 48$. ასევე, გვაქვს $11 < S_1 + 11 < S_2 + 11 < ... < S_{30} + 11 = 59$. ამრიგად 1-სა და 59-ს შორის მოქცეულია 60 მთელი რიცხვი. ამიტომ ორი მაინც ტოლი უნდა იყოს. მაშასადამე არსებობს i და j ისეთი, რომ $S_j = S_i + 11$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $i+1$-დან j-ურ დღემდე (ჩათვლით)ნინიკომ მიირთვა ჯამურად ზუსტად 11 კანფეტი.

ამოცანა 4 5 ქულა

$ABCD$ მართკუთხედში $AB > BC$. E და F წერტილები აღებულია CD მონაკვეთზე ისე, რომ $CE = ED$ და $BC = CF$. ცნობილია, რომ BE წრფე მართობულია AC წრფის. დაამტკიცეთ, რომ $AB = BF$.

ამოხსნა



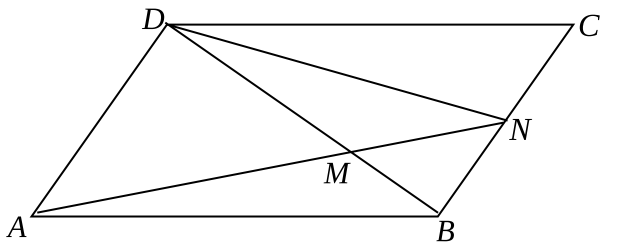
ვინაიდან $EC \| AB$, ამიტომ ΔKEC მსგავსია ΔKBA, საიდანაც გვექნება, რომ $\frac{KC}{AK} = \frac{EC}{AB} = \frac{1}{2}$. ამიტომ $AK = 2KC$ და $AC = 3KC$.
ABC მართკუთხა სამკუთხედში BK არის AC ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე, ამიტომ $AB^2 = AK \cdot AC = 2KC \cdot 3KC = 6KC^2$. ანალოგიურად $BC^2 = KC \cdot AC = KC \cdot 3KC = 3KC^2$. ვინაიდან $BC = CF$, ამიტომ $BF^2 = 2BC^2 = 6KC^2 = AB^2$. ამრიგად $AB = BF$.

ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა მათემატიკაში
2019-20 სასწავლო წელი
II ტური XI-XII კლასი

ამოცანა 5 **5 ქულა**

$ABCD$ პარალელოგრამის BD დიაგონალზე აღებულია M წერტილი ისე, რომ $MD=3BM$. AM წრფე BC წრფეს კვეთს N წერტილში. იპოვეთ MND სამკუთხედის ფართობის შეფარდება $ABCD$ პარალელოგრამის ფართობთან.

ამოხსნა



ვინაიდან $BN \parallel AD$, ამიტომ ΔMNB მსგავსია ΔMAD, საიდანაც გვექნება, რომ $\frac{BN}{AD}=\frac{BM}{MD}=\frac{1}{3}$.

მაშასადამე $\frac{BN}{BC}=\frac{1}{3}$. ამიტომ მივიღებთ

$$S_{MND}=\frac{DM}{DB}S_{BDN}=\frac{3}{4}S_{BDN}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}S_{BDC}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{8}S_{ABCD}.$$

პასუხი: $\frac{1}{8}$