შეფასების სქემა

მათემატიკა

პასუხები

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ბ	ბ	გ	ბ	ა	დ	ბ	გ	დ	დ	ა	ბ

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
გ	ა	დ	გ	გ	დ	ა	ა	ბ	გ	ა	ა

ქვემოთ თითოეული დავალებისათვის ნიმუშად წარმოდგენილია ერთ-ერთი **შესაძლო პასუხი, რომლებიც მაქსიმალური ქულით შეფასდება.**

(7) 25

(3) 1. მოიყვანეთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული პერიოდული ფუნქციის განსაზღვრება.
დაამტკიცეთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული $f(x)=\sin x$ ფუნქცია პერიოდულია და იპოვეთ მისი უმცირესი დადებითი პერიოდი (პასუხი დაასაბუთეთ).

(4) 2. ვთქვათ, f ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული პერიოდული ფუნქციაა და მისი უმცირესი დადებითი პერიოდია T. იპოვეთ $h(x)=f(\alpha x+\beta)$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი, თუ α და β ნამდვილი რიცხვებია და $\alpha>0$. პასუხი დაასაბუთეთ.

(3) 1. ამოხსნა

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის D ქვესიმრავლეზე განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება პერიოდული ფუნქცია პერიოდით T, ხოლო T რიცხვს ეწოდება f ფუნქციის პერიოდი, თუ იქიდან, რომ $x\in D$, გამომდინარეობს, რომ $\{x-T;x+T\}\subseteq D$ და $f(x+T)=f(x)$.

ვაჩვენოთ, რომ $f(x)=\sin x$ პერიოდული ფუნქციაა და მისი უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π. რადგან $\sin x$ ფუნქცია განსაზღვრულია $\mathbb{R}$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე, ამიტომ თუ $x\in\mathbb{R}$, მაშინ $\{x-2\pi;\, x+2\pi\}\subset\mathbb{R}$ და დაყვანის ფორმულების თანახმად $\sin(x+2\pi)=\sin x$.

ვთქვათ f ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდია T, მაშინ $\sin T=\sin(0+T)=\sin 0=0$. ამიტომ T წარმოადგენს $\sin T=0$ განტოლების ამონახსნს: $T=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. თუ $T=\pi$, მაშინ ყოველი x-თვის უნდა შესრულდეს ტოლობა: $\sin(x+\pi)=\sin x$, მაგრამ ეს ტოლობა არ სრულდება, როდესაც მაგალითად, $x=\dfrac{\pi}{2}$. ამიტომ $T\neq\pi$ და მაშასადამე $T=2\pi$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მოიყვანა პერიოდული ფუნქციის განსაზღვრება;
ბ) აღნიშნა, რომ $f(x)=\sin x$ ფუნქციის პერიოდია 2π;
გ) დაასაბუთა, რომ $f(x)=\sin x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π.

1 ნაწილის შეფასების სქემა

1 ქულა: ა; ან ბ.
2 ქულა: ა, ბ; ან გ.
3 ქულა: ა, გ.

(4) 2. **ამოხსნა**

ვაჩვენოთ, რომ h ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდია $T_1 = \frac{1}{\alpha}T$.

მართლაც, $\{\alpha x + \beta \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, ამიტომ h ფუნქციის განსაზღვრის არეა $\mathbb{R}$.

გარდა ამისა,

$h(x+T_1) = f(\alpha(x+T_1)+\beta) = f(\alpha x + \alpha T_1 + \beta) = f(\alpha x + \beta + T) = f(\alpha x + \beta) = h(x)$.

მაშასადამე, $T_1 = \frac{1}{\alpha}T$ არის h ფუნქციის პერიოდი.

ვაჩვენოთ, რომ $T_1 = \frac{1}{\alpha}T$ არის h ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ არსებობს T_2 დადებითი პერიოდი და $T_2 < T_1$. მაშინ, $\forall x \in \mathbb{R}$ - სთვის, ერთის მხრივ $h(x+T_2) = h(x) = f(\alpha x + \beta)$, ხოლო მეორეს მხრივ, $h(x+T_2) = f(\alpha x + \alpha T_2 + \beta)$. ე.ი. $f(\alpha x + \alpha T_2 + \beta) = f(\alpha x + \beta)$. რადგან $y \equiv \alpha x + \beta$ ცვლადს შეუძლია მიიღოს ყველა ნამდვილი რიცხვითი მნიშვნელობა, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა ნიშნავს, რომ $\forall y \in \mathbb{R}$-სთვის, $f(y + \alpha T_2) = f(y)$. ე.ი. $\alpha T_2 < \alpha T_1 = T$ წარმოადგენს f ფუნქციის დადებით პერიოდს, რაც წინააღმდეგობაა იმ ფაქტთან, რომ T არის f ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაწერა, რომ h ფუნქციის პერიოდია $\frac{1}{\alpha}T$;

ბ) დაასაბუთა, რომ h ფუნქციის პერიოდია $\frac{1}{\alpha}T$;

გ) დაწერა, რომ h ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდია $\frac{1}{\alpha}T$.

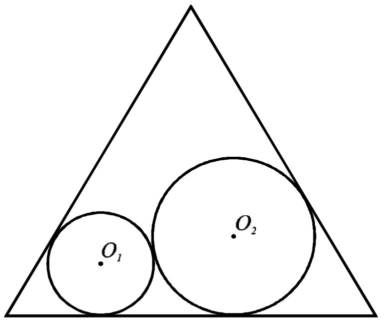
დ) დაამტკიცა, რომ h ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდია $\frac{1}{\alpha}T$.

შეფასების სქემა

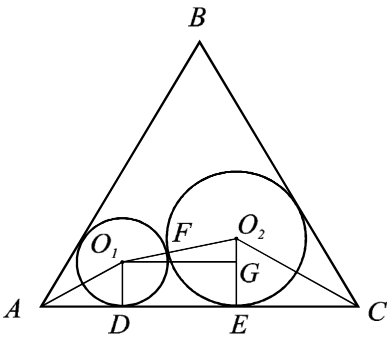
1 ქულა: ა.
2 ქულა: ბ; ან გ.
3 ქულა: ბ, გ.
4 ქულა: დ.

(5) 26

ერთეული სიგრძის გვერდის მქონე წესიერ სამკუთხედში ჩახაზულია წრეწირები, რომლებიც ერთმანეთს და სამკუთხედის ორ გვერდს ეხება ისე, როგორც ეს სურათზეა ნაჩვენები. იპოვეთ მცირე წრეწირის რადიუსი, თუ ის ორჯერ ნაკლებია დიდი წრეწირის რადიუსზე.



ამოხსნა



ვთქვათ O_1 და O_2 შესაბამისად r და $2r$ რადიუსინი წრეწირის ცენტრებია, F - წრეწირების შეხების წერტილი, ხოლო D და E - შესაბამისად AC გვერდთან მათი შეხების წერტილები. ABC სამკუთხედი ტოლგვერდაა, ამიტომ $\angle A = \angle B = 60°$. რადგან AO_1 და CO_2 სხივები შუაზე ყოფს შესაბამისად A და C კუთხეებს, ამიტომ $\angle O_1AD = \angle O_2CE = 30°$. სამკუთხედები AO_1D და CO_2E მართკუთხაა, ამიტომ:

$AD = \dfrac{r}{\operatorname{tg} 30°} = r\sqrt{3},\ EC = \dfrac{2r}{\operatorname{tg} 30°} = 2r\sqrt{3}$.

O_1O_2G მართკუთხა სამკუთხედში $O_1O_2 = 3r,\ O_2G = O_2E - O_1D = 2r - r = r$, ამიტომ

$DE = O_1G = \sqrt{9r^2 - r^2} = 2r\sqrt{2}$. აქედან გვექნება

$AC = AD + DE + EC = r\sqrt{3} + 2r\sqrt{3} + 2r\sqrt{2} = 1.$

$r = \dfrac{1}{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}.$

პასუხი. $r = \dfrac{1}{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}.$

ამოხსნის ეტაპები

ა) შენიშნა, რომ $\angle DAO_1 = 30°$ ან $\angle ECO_2 = 30°$;

ბ) AD და CE მონაკვეთებიდან ერთ-ერთი გამოსახა r-ის საშუალებით;

გ) გამოთვალა O_2G მონაკვეთი;

დ) შეადგინა განტოლება $3r\sqrt{3} + 2r\sqrt{2} = 1$, ან მისი ტოლფასი განტოლება;

გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა: ა;
2 ქულა: ბ; ან გ.
3 ქულა: ბ, გ.
4 ქულა: ბ, გ, დ.
5 ქულა: ბ, გ, დ, ე.

(5)27.

ამოხსენით უტოლობა:

$$\sqrt{2x^2-10x+11} \ge x-2 .$$

ამოხსნა

შევნიშნოთ, რომ უტოლობის ამოხსნა დაიყვანება შემდეგი ორი შემთხვევის განხილვაზე: ა) $x-2<0$ და ბ) $x-2\ge 0$.

ა) ვთქვათ $x-2<0$. ამოსახსნელი უტოლობის მარცხენა მხარეს აზრი აქვს, როდესაც $2x^2-10x+11\ge 0$. შესაბამისად უტოლობა იქნება ჭეშმარიტი, როდესაც

$$\begin{cases} x-2<0 \\ 2x^2-10x+11\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x\in\left(-\infty;\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5+\sqrt{3}}{2};+\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}\right].$$

ბ) ვთქვათ $x-2\ge 0$. ამ შემთხვევაში უტოლობის ორივე მხარის კვადრატში აყვანა გვაძლევს მის ტოლფას უტოლობას, ამიტომ გვაქვს

$$\begin{cases} x-2\ge 0 \\ 2x^2-10x+11\ge (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-6x+7\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x\in\left(-\infty;3-\sqrt{2}\right]\cup\left[3+\sqrt{2};+\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[3+\sqrt{2};+\infty\right).$$

ამრიგად, $x\in\left(-\infty;\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[3+\sqrt{2};+\infty\right)$.

პასუხი: $\left(-\infty;\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[3+\sqrt{2};+\infty\right)$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) შენიშნა, რომ უტოლობის ამოხსნა დაიყვანება შემდეგი ორი შემთხვევის განხილვაზე: $x-2<0$ და $x-2\ge 0$;

ბ) განიხილა $2x^2-10x+11\ge 0$ უტოლობა;

გ) განიხილა შემთხვევა $x-2<0$ და მიიღო $x\in\left(-\infty;\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$;

დ) ჩაწერა $2x^2-10x+11\ge (x-2)^2$;

ე) განიხილა შემთხვევა $x-2\ge 0$ და მიიღო $x\in\left[3+\sqrt{2};+\infty\right)$.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა; ან ბ; ან დ.

2 ქულა - ა, ბ; ან ა, დ; ან ბ, გ;

3 ქულა - ა, ბ, გ;   ან ბ. გ, დ; ან დ, ე.

4 ქულა - ა, ბ, გ, დ;   ან   ა, დ, ე.

5 ქულა - ბ, გ, დ, ე.