

დასკვნითი ტური

XI-XII კლასი

ამოცანა 1

5 ქულა

ვთქვათ  $a, b$  და  $c$  დადებითი ნამდვილი რიცხვებისთვის სრულდება  $a + b + c \geq abc$  უტოლობა. დაამტკიცეთ, რომ  $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc\sqrt{3}$

ამოხსნა

შევნიშნოთ, რომ

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2 + ((a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (a^2 + c^2)) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a + b + c)^2,$$

ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ პირობას  $a + b + c \geq abc$ , გვექნება:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 \geq \frac{1}{3}(abc)^2. \quad (1)$$

გვაქვს:

$$a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{c\sqrt[3]{abc}} \geq 4\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{c\sqrt[3]{abc}}} = 4\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

მიღებული უტოლობის გამოყენებით გვექნება

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq 27(abc)^2. \quad (2)$$

მაშინ (1), (2)-ს გამოყენებით გვექნება

$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 (a^2 + b^2 + c^2) \geq 27(abc)^2 \cdot \frac{1}{3}(abc)^2 = 9(abc)^4 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq abc\sqrt{3}.$$

დამტკიცება დასრულებულია.

ამოცანა 2

5 ქულა

ვთქვათ  $ABC$  სამკუთხედში  $\angle C = 90^\circ$  და  $AC > BC$ .  $AC$  დიამეტრის მქონე  $\Gamma$  წრეწირზე აღებულია  $M$  წერტილი ისე, რომ  $M$  და  $B$  წერტილები მდებარეობენ  $AC$  წრფის ერთი და იგივე მხარეს და  $CM = CB$ .  $AC$  მონაკვეთზე აღებულია  $N$  წერტილი ისე, რომ  $AM = AN$ . ვთქვათ  $\Gamma$  წრეწირი  $BN$  მონაკვეთს კვეთს  $K$  წერტილში. იპოვეთ  $BK : KN$ .

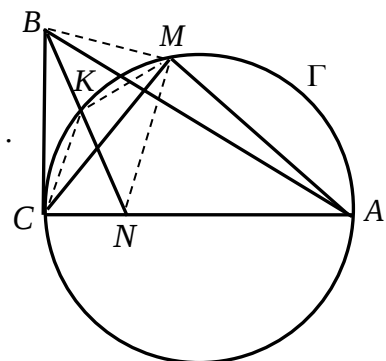
ამოხსნა

$$\text{ვთქვათ } \angle MAN = \alpha, \text{ მაშინ } \angle BCM = \frac{\angle KCM}{2} = \angle MAN = \alpha.$$

$$\text{ამიტომ } \angle NMA = \angle MNA = \angle CBM = \angle CMB = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{გვაქვს } \angle BMN &= \angle BMC + \angle CMN = \angle BMC + \angle CMA - \angle NMA = \\ &= 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 90^\circ. \end{aligned}$$

ამრიგად  $BN$  არის  $CBMN$



დასკვნითი ტური

XI-XII კლასი

ოთხკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრი.

დამატებით თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$\angle CKM = 180^\circ - \angle MAN = 180^\circ - \alpha = 2\angle CBM$  და  $K$  მდებარეობს  $BN$  დიამეტრზე, მაშინ  $K$  იქნება  $CBMN$  ოთხკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი, ამიტომ  $BK : KN = 1:1$

**პასუხი:**  $BK : KN = 1:1$

ამოცანა 3

5 ქულა

მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაზე მოცემულია ისეთი  $A_1A_2A_3...A_nA_1$  შეკრული ტეხილი, რომ ყოველი  $A_i (i=1, 2, ..., n; n \geq 3)$  წერტილის კოორდინატები რაციონალური რიცხვებია და ტეხილის ყველა მდგენს ერთი და იგივე სიგრძე აქვს, ანუ,  $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n = A_nA_1$ . დამტკიცეთ, რომ  $n$  ლუწი რიცხვია.

**ამოხსნა**

ვთქვათ  $A_1, A_2, ..., A_n$  წერტილების კოორდინატებია შესაბამისად  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), ..., (x_n; y_n)$ .

ვთქვათ  $a_i = x_{i+1} - x_i, b_i = y_{i+1} - y_i, i = 1, 2, ..., n$ ; , სადაც  $x_{n+1} = x_1, y_{n+1} = y_1$ . ვინაიდან  $a_i, b_i$

$(i = 1, 2, ..., n)$  რიცხვები რაციონალური რიცხვებია, შეგვიძლია თითოეული მათგანი გავამრავლოთ ისეთ ერთი და იგივე მთელ რიცხვზე, რომ ყველა მათგანი გახდეს მთელი და მათი უდიდესი საერთო გამყოფი იყოს 1, ამიტომ ვიგულისხმობთ, რომ  $a_i, b_i$

$(i = 1, 2, ..., n)$  რიცხვები მთელი რიცხვებია და უსგ  $(|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|, |b_1|, |b_2|, ..., |b_n|) = 1$ . ამასთან სრულდება ტოლობები:  $a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = 0$  და  $a_1^2 + b_1^2 = ... = a_n^2 + b_n^2 = c$ , სადაც  $c$  რაღაც ნატურალური რიცხვია.

დავუშვათ  $c$  არის კენტი. მაშინ ყოველი  $i$ -თვის  $a_i, b_i$  რიცხვებიდან ზუსტად ერთი მათგანი იქნება კენტი, ამიტომ ვინაიდან  $a_i, b_i$  რიცხვების მთლიანი რაოდენობა არის  $2n$ , ვიღებთ, რომ მათ შორის არის ზუსტად  $n$  ცალი კენტი რიცხვი. მეორე მხრივ  $0 = a_1 + a_2 + ... + a_n + b_1 + b_2 + ... + b_n \equiv n \pmod{2}$ , ე. ი.  $n$  ლუწია.

დავუშვათ  $c$  არის ლუწი. მაშინ ყოველი  $i$ -თვის გვაქვს  $a_i \equiv b_i \pmod{2}$ . თუ რომელიმე  $i$ -თვის  $a_i, b_i$  რიცხვები კენტია, მაშინ  $c = a_i^2 + b_i^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ . თუ რომელიმე  $i$ -თვის  $a_i, b_i$  რიცხვები ლუწია, მაშინ  $c = a_i^2 + b_i^2 \equiv 0 + 0 \equiv 0 \pmod{4}$ . განხილული ორი შემთხვევა შეუძლებელია ერთდროულად შესრულდეს  $c$ -თვის, ამიტომ ან ყველა  $a_i, b_i (i = 1, 2, ..., n)$  ლუწია, ან ყველა კენტია. ვინაიდან უსგ  $(|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|, |b_1|, |b_2|, ..., |b_n|) = 1$ , ამიტომ შეუძლებელია ყველა  $a_i, b_i (i = 1, 2, ..., n)$  იყოს ლუწი. ამრიგად გვაქვს  $0 = a_1 + a_2 + ... + a_n \equiv n \pmod{2}$ , ე. ი.  $n$  კვლავ ლუწია. დამტკიცება დასრულებულია.

დასკვნითი ტური

XI-XII კლასი

ამოცანა 4

5 ქულა

ვთქვათ, მოცემულია სიმრავლე  $A = \{1, 2, 3, \dots, 2n-1\}$ , სადაც  $n$  ნატურალური რიცხვია და  $n \geq 2$ .  $A$  სიმრავლიდან ამოგდებულია არანაკლებ  $n-1$  ელემენტი შემდეგი წესით:

ა) თუ ამოგდებულია  $a \in A$  ელემენტი და  $2a \in A$ , მაშინ ასევე უნდა ამოვადოთ ელემენტი  $2a$ ;

ბ) თუ ამოგდებულია  $a$  და  $b$  ( $a \neq b$ ) ელემენტები  $A$  სიმრავლიდან და  $a+b \in A$ , მაშინ ასევე უნდა ამოვადოთ ელემენტი  $a+b$ ;

იპოვეთ ამ წესით რიცხვების ამოგდების შემდეგ  $A$  სიმრავლეში დარჩენილი რიცხვების ჯამის მაქსიმალური შესაძლო მნიშვნელობა.

**ამოხსნა**

ვთქვათ  $A$  სიმრავლიდან ამოგდებულია რიცხვები  $b_1, b_2, \dots, b_k$ , ( $k \geq n-1$ ). ამასთან ვიგულისხმობთ, რომ

$$1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k \leq 2n-1.$$

ვაჩვენოთ, რომ  $b_i + b_{k-i+1} \geq 2n$ , ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ რომელიმე  $i$ -თვის  $b_i + b_{k-i+1} \leq 2n-1$ , მაშინ ამოგდებულ რიცხვებს შორისაა  $b_i + b_1, \dots, b_i + b_{k-i}, b_i + b_{k-i+1}$  რიცხვები, ხოლო შეფასებიდან  $b_i + b_1 < \dots < b_i + b_{k-i} < b_i + b_{k-i+1}$  ჩანს, რომ ამოგდებულია  $b_i$ -ზე დიდი  $k-i+1$  ცალი რიცხვი, ეს კი ეწინააღმდეგება იმას, რომ ამოგდებული უნდა იყოს  $b_i$ -ზე დიდი  $b_{i+1}, b_{i+2}, \dots, b_k$  რიცხვები, რომელთა რაოდენობაა  $k-i$ . ამრიგად  $b_i + b_{k-i+1} \geq 2n$ , სადაც  $i = 1, 2, \dots, k$ .

ვთქვათ  $A$  სიმრავლიდან ამოგდებული რიცხვების ჯამია  $S$ . მაშინ გვაქვს შეფასება

$$2S = (b_1 + b_k) + (b_2 + b_{k-1}) + \dots + (b_k + b_1) \geq 2n + 2n + \dots + 2n = 2kn \geq 2n(n-1).$$

ამრიგად,  $S \geq n(n-1)$ . მაშინ  $A$  სიმრავლეში დარჩენილი რიცხვების ჯამისთვის გვექნება შეფასება:

$$(1+2+3+\dots+2n-1) - S = n(2n-1) - S \leq n(2n-1) - n(n-1) = n^2.$$

ამრიგად  $A$  სიმრავლეში დარჩენილი რიცხვების ჯამის მნიშვნელობა არ აღემატება  $n^2$ -ს. ვაჩვენოთ, რომ  $n^2$  რეალიზებადია. მართლაც, თუ  $A$  სიმრავლიდან ამოვადებთ რიცხვებს  $2, 4, 6, \dots, 2n-2$ , მაშინ რიცხვების ამოგდების ორივე წესი დაცულია და  $A$  სიმრავლეში დარჩენილი რიცხვების ჯამი იქნება

$$(1+2+3+\dots+2n-1) - (2+4+\dots+2n-2) = n(2n-1) - n(n-1) = n^2.$$

**პასუხი:**  $A$  სიმრავლეში დარჩენილი რიცხვების ჯამის მაქსიმალური შესაძლო მნიშვნელობა არის  $n^2$ .

ამოცანა 5

ვთქვათ  $O$  არის  $ABC$  სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი, ხოლო  $M, N$  და  $Q$  წერტილები არის ჩახაზული წრეწირის შესაბამისად  $BC, AC$  და  $AB$  გვერდებთან შეხების წერტილები,  $K$  არის  $MN$  მონაკვეთის შუაწერტილი, ხოლო  $P$  არის  $O$  წერტილიდან  $AM$  მონაკვეთზე დაშვებული მართობის ფუძე.  $T$  წერტილი არის  $KP$  წრფისა და  $AC$  წრფის გადაკვეთის წერტილი. დამტკიცეთ, რომ  $MT$  და  $QN$  წრფეები პარალელურია.

ამოხსნა

ვთქვათ  $QN$  მონაკვეთი  $AO$  და  $AM$  მონაკვეთებს კვეთს შესაბამისად  $R$  და  $S$  წერტილებში, ხოლო  $AM$  მონაკვეთის წრეწირთან მეორე გადაკვეთის წერტილია  $L$ . ცხადია, რომ  $MLN$  სამკუთხედში  $PK$  შუამონაკვეთია, ამიტომ  $PK \parallel LN$ . ვინაიდან  $\angle ARS = \angle APO = 90^\circ$ , ამიტომ  $\triangle ARS$  მსგავსია  $\triangle APO$ -ის, შესაბამისად გვექნება

$$\frac{AR}{AP} = \frac{AS}{AO} \Rightarrow AS \cdot AP = AR \cdot AO. \text{ მეორე მხრივ } AR \cdot AO = AN^2 = AL \cdot AM. \text{ ამრიგად,}$$

$$AS \cdot AP = AL \cdot AM \Rightarrow \frac{AS}{AM} = \frac{AL}{AP}.$$

ასევე, შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან  $PT \parallel LN$ , ამიტომ  $\triangle ALN$  მსგავსია  $\triangle APT$ -ის, შესაბამისად გვექნება  $\frac{AL}{AP} = \frac{AN}{AT}$ , ეს კი წინა პროპორციასთან ერთად გვაძლევს  $\frac{AS}{AM} = \frac{AN}{AT}$ , საიდანაც

გამომდინარეობს, რომ  $SN \parallel MT \Leftrightarrow QN \parallel MT$ . დამტკიცება დასრულებულია.

