

ამოცანა 1

5 ქულა

სულ რამდენ ელემენტს შეიცავს 2021-ის ლუწ ნატურალურ რიცხვზე გაყოფისას მიღებული ყველა შესაძლო ნაშთების სიმრავლე?

ამოხსნა

ვთქვათ n ლუწი გამყოფია. თუ $n \geq 2022$, მაშინ $2021 = 0 \cdot n + 2021$, და ნაშთი უდრის 2021. თუ $2020 \geq n > 1010$, მაშინ $2021 = n + r$, სადაც ნაშთი $1 \leq r < n$ და კენტია. ასეთი $(n; r)$ წყვილები კი სულ 505 -ია: $(2020; 1), (2018; 3), \dots, (1012; 1009)$. თუ $n \leq 1010$, მაშინ $r \leq 1009$ და კენტია, ე.ი. ემთხვევა ადრე მიღებული ნაშთებიდან ერთ-ერთს. მაშასადამე ნაშთების სიმრავლეში სულ 506 ელემენტია.

ამოცანა 2

5 ქულა

დაამტკიცეთ, რომ თუ k ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვია, ხოლო a_0 - არანულოვანი მთელი რიცხვი, მაშინ $a_{n+1} = \sqrt[k]{a_0 + \sqrt[k]{a_n}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ფორმულით მოცემული მიმდევრობის არცერთი წევრი არ არის მთელი.

ამოხსნა

თუ $a_0 < 0$, აღვნიშნოთ $b_0 = -a_0 > 0$, მაშინ $b_{n+1} = \sqrt[k]{b_0 + \sqrt[k]{b_n}} = -a_{n+1} > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$

თუ რომელიმე n -თვის a_n მთელია, მაშინ b_n იქნება ნატურალური. ამიტომ შეგვიძლია განვიხილოთ მხოლოდ ის შემთხვევა, როდესაც $a_0 \geq 1$. ვაჩვენოთ, რომ $a_1 \notin \mathbb{N}$. დავუშვათ წინააღმდეგი: $a_1 = \sqrt[k]{a_0 + \sqrt[k]{a_0}} = m$ ნატურალური რიცხვია. მაშინ $a_0 + \sqrt[k]{a_0} = m^k$ და ამიტომ $x = \sqrt[k]{a_0} = m^k - a_0$ ნატურალურია. მაშინ $a_0 = x^k$ და $x^k + x = m^k$. მაგრამ თუ $k \geq 2$, მაშინ $x^k + x$ არ შეიძლება იყოს ნატურალური, რადგან

$$(x+1)^k = (x+1)^{k-1}(x+1) > (x^{k-1}+1)(x+1) > x^k + x > x^k,$$

ამიტომ $a_1 \notin \mathbb{N}$. დავუშვათ რაიმე n -თვის $a_n \notin \mathbb{N}$, ხოლო $a_{n+1} \in \mathbb{N}$. მაშინ ტოლობიდან $a_{n+1} = \sqrt[k]{a_0 + \sqrt[k]{a_n}}$ ვღებულობთ $a_n = a_{n+1}^k - a_0 \in \mathbb{N}$, რაც ჩვენს დაშვებას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე მიმდევრობის არცერთი წევრი არ შეიძლება იყოს მთელი.

ამოცანა 3

5 ქულა

მოცემულია 2022 სიმრავლე, რომელთაგან თითოეული შეიცავს ზუსტად 44 ელემენტს, ამასთან ყოველ ორ სიმრავლეს ერთადერთი საერთო ელემენტი გააჩნია. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ელემენტი, რომელიც ყველა ამ სიმრავლეს ეკუთვნის.

ამოხსნა

განვიხილოთ ამ 2022 სიმრავლიდან ერთ-ერთი A სიმრავლე. მასში იარსებებს ელემენტი a , რომელიც მინიმუმ სხვა 45 სიმრავლეს ეკუთვნის. მართლაც, რადგან ყოველ ორ სიმრავლეს ერთადერთი საერთო ელემენტი აქვს, ამიტომ თუ A -ს ყველა ელემენტი არაუმეტეს 44 სიმრავლეს ეკუთვნის, მაშინ A სიმრავლეს საერთო ელემენტები შეიძლება ჰქონდეს არაუმეტეს $44 \cdot 44 = 1936$ სიმრავლესთან, რაც ამოცანის პირობას ეწინააღმდეგება. ვთქვათ a ეკუთვნის A სიმრავლეს და სიმრავლეებს $A_1, A_2, \dots, A_{45}$. განვიხილოთ მოცემული 2022 სიმრავლიდან ნებისმიერი B სიმრავლე. თუ a არ ეკუთვნის B -ს, მაშინ B სიმრავლეს სხვადასხვა საერთო ელემენტები უნდა ჰქონდეს $A_1, A_2, \dots, A_{45}$ სიმრავლეებთან, რადგან $A_1, A_2, \dots, A_{45}$ სიმრავლეებს უკვე აქვს ერთი საერთო ელემენტი a , ამიტომ B სიმრავლეში არანაკლებ 45 ელემენტი უნდა იყოს. რაც ამოცანის პირობას ეწინააღმდეგება.

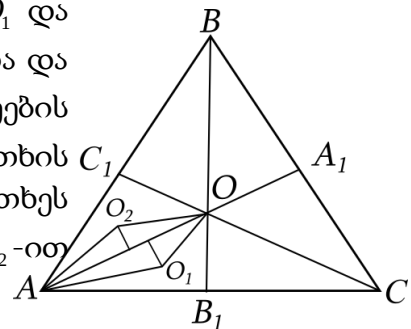
ამოცანა 4

5 ქულა

ABC სამკუთხედში გავლებული AA_1 , BB_1 და CC_1 ბისექტრისები O წერტილში იკვეთება. დაამტკიცეთ, რომ თუ AOB_1 , AOC_1 , BOA_1 , BOC_1 სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირების რადიუსები ტოლია, მაშინ ABC სამკუთხედი ტოლგვერდია.

ამოხსნა

განვიხილოთ AOB_1 და AOC_1 სამკუთხედები. ვთქვათ O_1 და O_2 შესაბამისად მათში ჩახაზული წრეწირების ცენტრებია და ამიტომ AO_1 და AO_2 შესაბამისად OAB_1 და OAC_1 კუთხეების ბისექტრისებია. რადგან AO თავის მხრივ A კუთხის CC_1 ბისექტრისაა, ამიტომ AO_1 , AO და AO_2 წრეწირები A კუთხეს ოთხ თანაბარ ნაწილად ყოფს. ალგნიშნით D_1 -ით და D_2 -ით შესაბამისად O_1 და O_2 ცენტრებიდან AA_1 ბისექტრი-



საზე დაშვებული მართობების ფუძეები. ამოცანის პირობის თანახმად $O_1D_1 = O_2D_2$, ამიტომ AO_1D_1 და AO_2D_2 მართკუთხა სამკუთხედები ტოლია, რადგან აქვს ტოლი კათეტი

და მახვილი კუთხე. აქედან $AO_1 = AO_2$ და სამკუთხედები AOO_1 და AOO_2 ტოლია ორი გვერდით და მათ შორის მდებარე მახვილი კუთხით. ამიტომ $\angle AOO_1 = \angle AOO_2$ და რადგან OO_1 და OO_2 შესაბამისად AOB_1 და AOC_1 კუთხეების ბისექტრისებია, გვექნება $\angle B_1OO_1 = \angle AOO_1 = \angle AOO_2 = \angle C_1OO_2$ და $\angle AB_1O = \angle AC_1O$. თუ შევადარებთ კუთხეებს ABB_1 და ACC_1 სამკუთხედებში, მივიღებთ, რომ $\angle ABB_1 = \angle ACC_1$ და ამიტომ $\angle B = \angle C$. ანალოგიური მსჯელობით მტკიცდება, რომ $\angle A = \angle B$. ამით დამტკიცება დასრულებულია.

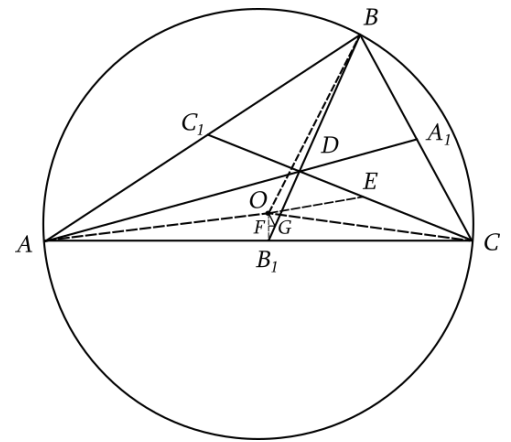
ამოცანა 5

5 ქულა

დაამტკიცეთ, რომ მახვილკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი არ აღემატება სამივე მედიანის ჯამის მეოთხედს.

ამოხსნა

ვთქვათ ABC სამკუთხედში AA_1 , BB_1 , CC_1 მედიანები D წერტილში იკვეთება, ხოლო O წერტილი სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრია. რადგან ABC სამკუთხედი მახვილკუთხაა, O წერტილი სამკუთხედის შიგნით იქნება მოთავსებული და ამიტომ ABD , BCD და ACD სამკუთხედებიდან ერთ-ერთს ეკუთვნის. ვთქვათ O წერტილი ეკუთვნის ACD სამკუთხედს (იხილე ნახაზი). დავამტკიცოთ, რომ მაშინ $AD + DC \geq OA + OC$. მართლაც, გავაგრძელოთ AO წრფე DC მონაკვეთის გადაკვეთამდე და



გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ E -თი. მაშინ $AD + DE \geq OA + OE$, $OE + EC \geq OC$. ამ

უტოლობების შეკრება გვაძლევს $AD + DC \geq OA + OC$. რადგან $AD = \frac{2}{3}AA_1$, $CD = \frac{2}{3}CC_1$,

ამიტომ $\frac{2}{3}(AA_1 + CC_1) \geq OA + OC = 2R$, სადაც R არის ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი. აქედან $AA_1 + CC_1 \geq 3R$.

დავამტკიცოთ, რომ $BB_1 > R$. რადგან $OA = OC$, ამიტომ O წერტილიდან AC გვერდზე დაშვებული მართობის ფუძე B_1 წერტილს დაემთხვევა. თუ OB_1 მონაკვეთის შუა F წერტილიდან მართობს აღვმართავთ, ის რომელიღაც G წერტილში გადაკვეთს BB_1 მედიანას, ამასთან $GO = GB_1$, ამიტომ $BB_1 = BG + GO \geq BO = R$. თუ ზემოთ დამტკიცებულ უტოლობას $AA_1 + CC_1 \geq 3R$ გავითვალისწინებთ, მივიღებთ $AA_1 + BB_1 + CC_1 \geq 4R$.