2021 - 2022 სასწავლო წლის ეროვნული ოლიმპიადა მათემატიკაში

II ტური

X კლასი

ამოცანა 1

ორი ნატურალური რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი 45-ით მეტია მათ უდიდეს საერთო გამყოფზე და 200-ით ნაკლებია ამ რიცხვების ნამრავლზე. რას უდრის ამ რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი?

ამოხსნა

აღვნიშნოთ m და n რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი x-ით, მაშინ $m = x\cdot y,\ n = x\cdot z$, სადაც უ.ს.გ$(y,z)=1$. ამიტომ უ.ს.ჯ $(m,n) = xyz$ ხოლო $mn = x^2yz$. ვღებულობთ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} xyz = x+45 \\ x^2yz = xyz+200 \end{cases},$$ მარჯვენა მხარეში xyz-ის გამორიცხვა გვაძლევს:

$$\begin{cases} xyz = x+45 \\ x^2yz = x+245 \end{cases},$$

აქედან $x = \dfrac{x+245}{x+45}$, $x^2+44x-245=0$, $x = -22\pm\sqrt{484+245},\ x=5.$

პასუხი: 5.

ამოცანა 2

x და y არაუარყოფითი რიცხვები აკმაყოფილებს უტოლობას $xy \ge x+4y+2$. იპოვეთ xy გამოსახულების მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ამოხსნა

გავითვალისწინოთ უტოლობა $x+4y \ge 4\sqrt{xy}$, მაშინ xy აკმაყოფილებს უტოლობას $xy \ge 4\sqrt{xy}+2$. თუ აღვნიშნავთ $z=\sqrt{xy}$, მაშინ უტოლობა გადაიწერება შემდეგი სახით: $z^2-4z-2\ge 0$. ამ უტოლობის ამოხსნა გვაძლევს $z\in\left(-\infty;2-\sqrt{6}\right]\cup\left[2+\sqrt{6};+\infty\right)$. რადგან $z=\sqrt{xy}\ge 0$, ამიტომ გვექნება $xy = z^2 \ge \left(2+\sqrt{6}\right)^2 = 10+4\sqrt{6}$.

ვაჩვენოთ, რომ xy ნამრავლს შეუძლია მიიღოს ყველა მნიშვნელობა $\left[10+4\sqrt{6};+\infty\right)$ სიმრავლიდან. მართლაც, თუ დავუშვებთ $x=4y$, მაშინ ამოცანაში მოცემული უტოლობა გადაიწერება ასე: $4y^2-8y-2\ge 0$, საიდანაც არაუარყოფითი y-თვის ვღებულობთ $y\in\left[\dfrac{2+\sqrt{6}}{2};+\infty\right)$, ანუ $xy = 4y^2 \in\left[10+4\sqrt{6};+\infty\right)$.

ამოცანა 3

იპოვეთ $f(1)+f(2)+\ldots+f(2021)$, თუ f ფუნქცია ყოველი არანულოვანი x-თვის აკმაყოფილებს ტოლობას

$$f(x)+2x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)+x=0\,.$$

ამოხსნა

აღვნიშნოთ $y=\frac{1}{x}$, მაშინ $x=\frac{1}{y}$ და განტოლებიდან ვღებულობთ $f\left(\frac{1}{y}\right)+\frac{2}{y^2}f\left(y\right)+\frac{1}{y}=0$, რომელიც ყოველი $y\neq 0$ - თვის სრულდება. თუ აქ ჩავსვამთ $y=x$, გვექნება:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x^2}f\left(x\right)+\frac{1}{x}=0,\qquad x\neq 0.$$

გავამრავლოთ ეს ტოლობა $2x^2$-ზე და გამოვაკლოთ მას საწყისი განტოლება. მივიღებთ

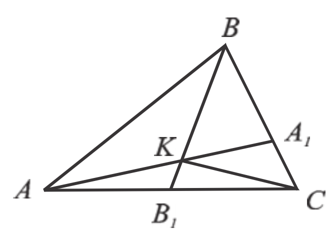
$$3f(x)=-x,\quad f(x)=-\frac{x}{3}.$$

ამიტომ $f(1)+f(2)+\ldots+f(2021)=-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{2021}{3}\right)=-\frac{2021\cdot 2022}{6}$.

ამოცანა 4

ABC სამკუთხედის BC და AC გვერდებზე აღებულია შესაბამისად A_1 და B_1 წერტილები. ვთქვათ AA_1 და BB_1 მონაკვეთები K წერტილში იკვეთება. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{AK}{AA_1}+\frac{BK}{BB_1}>1$

დამტკიცება.



რადგან $\frac{S_{\triangle KBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{KA_1}{AA_1}$, $\frac{S_{\triangle KAC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{KB_1}{BB_1}$, ამიტომ

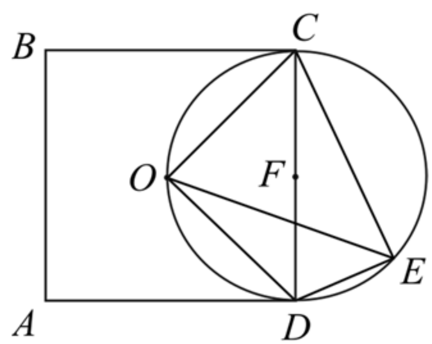
$$\left(1-\frac{AK}{AA_1}\right)+\left(1-\frac{BK}{BB_1}\right)=\frac{KA_1}{AA_1}+\frac{KB_1}{BB_1}=\frac{S_{\triangle KBC}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle KAC}}{S_{\triangle ABC}}<$$
$$<\frac{S_{\triangle KBC}+S_{\triangle KAC}+S_{\triangle KAB}}{S_{\triangle ABC}}=1,$$

საიდანაც $\frac{AK}{AA_1}+\frac{BK}{BB_1}>1$.

ამოცანა 5

$ABCD$ კვადრატის გარეთ აღებულია ისეთი E წერტილი, რომ $\angle ECD = 15°$, $\angle CDE = 75°$. კვადრატის O ცენტრიდან E წერტილამდე მანძილი 5 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ $ABCD$ კვადრატის ფართობი.

ამოხსნა



CD მონაკვეთის შუა F წერტილიდან $\frac{1}{2}CD$ რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირი. რადგან CDO და CDE სამკუთხედები მართკუთხაა, ამიტომ ეს წრეწირი გაივლის C, E, D და O წერტილებზე. სამკუთხედი CDO ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედია, ამიტომ $\angle OCD = \angle ODC = 45°$, $\angle OCE = \angle OCD + \angle ECD = 60°$, ხოლო $\angle OEC = ODC = 45°$, რადგან ეს ჩახაზული კუთხეები ერთი და იგივე OC რკალს ეყრდნობიან.

გამოვიყენოთ სინუსების თეორემა $\triangle CEO$-ში, გვექნება: $\frac{OC}{\sin 45°} = \frac{OE}{\sin 60°}$, აქედან ვღებულობთ $OC = \frac{\sin 45°}{\sin 60°} OE = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $CD = OC\sqrt{2} = \frac{10}{\sqrt{3}}$, $S_{ABCD} = \frac{100}{3}$.