2021 - 2022 სასწავლო წლის ეროვნული ოლიმპიადა მათემატიკაში

II ტური

XI-XII კლასი

ამოცანა 1 5 ქულა

ვთქვათ n არის ნატურალური რიცხვი, რომელსაც აქვს თვისება: n^2-ის $2n+1$-ზე გაყოფისას ნაშთი არის 1000. იპოვეთ ყველა ასეთი ნატურალური რიცხვი.

ამოხსნა

ვთქვათ n არის ლუწი ნატურალური რიცხვი, ე. ი. $n=2k,\ k\in N$. მაშინ $2n+1=4k+1$ და $n^2=4k^2=(4k+1)(k-1)+3k+1$. ვინაიდან $3k+1<4k+1$, ამიტომ ნაშთი არის $3k+1$, ე.ი. $3k+1=1000\Rightarrow k=333$, მაშინ $n=666$.

ვთქვათ n არის კენტი ნატურალური რიცხვი, ე. ი. $n=2k-1,\ k\in N$. მაშინ $2n+1=4k-1$ და $n^2=4k^2-4k+1=(4k-1)(k-1)+k$. ვინაიდან $k<4k-1$, ამიტომ ნაშთი არის k, ე.ი. $k=1000$, მაშინ $n=2k-1=1999$.

პასუხი: $n=666$, $n=1999$.

ამოცანა 2 5 ქულა

ნამდვილ რიცხვთა ყოველი $(x;y)$ წყვილისთვის განსაზღვრულია ნამდვილი რიცხვი $x*y$ ისე, რომ სრულდება პირობები:
ა) $x*x=0$ ყოველი x ნამდვილი რიცხვისთვის;
ბ) $x*(y*z)=(x*(5y))+25z$ ყოველი x,y და z ნამდვილი რიცხვებისთვის.
რას უდრის $2022*1000$?

ამოხსნა

ა) პუნქტით გვაქვს $\left(\frac{1}{5}x\right)*\left(\frac{1}{5}x\right)=0$ ყოველი x ნამდვილი რიცხვისთვის. მაშინ ბ) პუნქტით $x*0=x*\left(\left(\frac{1}{5}x\right)*\left(\frac{1}{5}x\right)\right)=(x*(5\left(\frac{1}{5}x\right)))+25\left(\frac{1}{5}x\right)=(x*x)+5x=5x$.

მეორე მხრივ, $x*0=x*\left(\left(\frac{1}{5}y\right)*\left(\frac{1}{5}y\right)\right)=(x*(5\left(\frac{1}{5}y\right)))+25\left(\frac{1}{5}y\right)=(x*y)+5y$.

ამრიგად, $(x*y)+5y=5x\Rightarrow x*y=5x-5y.$ $2022*1000=5(2022-1000)=5110$.

პასუხი: 5110.

2021 - 2022 სასწავლო წლის ეროვნული ოლიმპიადა მათემატიკაში

II ტური

XI-XII კლასი

ამოცანა 3 5 ქულა

მოცემულია (a_n) მიმდევრობა, რომლისთვისაც $a_1=1,\ a_2=1$ და

$$a_{n+1}=\frac{a_2^2}{a_1}+\frac{a_3^2}{a_2}+...+\frac{a_n^2}{a_{n-1}}\ ,\quad \text{როდესაც } n\in N \text{ და } n\geq 2.$$

იპოვეთ a_{2022}.

ამოხსნა

გვაქვს $a_{n+1}=\frac{a_2^2}{a_1}+\frac{a_3^2}{a_2}+...+\frac{a_n^2}{a_{n-1}}$, როდესაც $n\in N$ და $n\geq 2$ და $a_n=\frac{a_2^2}{a_1}+\frac{a_3^2}{a_2}+...+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$, როდესაც $n\in N$ და $n\geq 3$. მაშინ როდესაც $n\geq 3$, გვექნება

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_2^2}{a_1}+\frac{a_3^2}{a_2}+...+\frac{a_n^2}{a_{n-1}}-\left(\frac{a_2^2}{a_1}+\frac{a_3^2}{a_2}+...+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}\right)=\frac{a_n^2}{a_{n-1}}\ \Rightarrow\ \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=\frac{a_n}{a_{n-1}}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n-1}}=1.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $a_1=1,\ a_2=1$ და $a_3=\frac{a_2^2}{a_1}=1$, როდესაც $n\geq 3$, გვექნება

$$\left(\frac{a_4}{a_3}-\frac{a_3}{a_2}\right)+\left(\frac{a_5}{a_4}-\frac{a_4}{a_3}\right)+...+\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)=n-2\ \Rightarrow\ \frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_3}{a_2}=n-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1}=(n-1)a_n==(n-1)(n-2)a_{n-1}=...=(n-1)(n-2)\cdot...\cdot 4\cdot 3\cdot 2a_3=(n-1)!$$

ამრიგად $a_{2022}=2020!$

პასუხი: $a_{2022}=2020!$

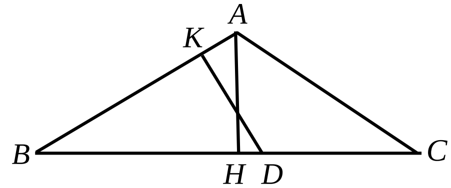
---

5 ქულა

ამოცანა 4

ABC სამკუთხედში $AB=AC$ და $\angle BAC>90^\circ$. სამკუთხედის BC ფუძეზე აღებული D წერტილიდან AB წრფეზე დაშვებული მართობის ფუძეა K და ის მდებარეობს AB მონაკვეთზე. ამასთან BKD სამკუთხედისა და $DKAC$ ოთხკუთხედის პერიმეტრები ტოლია. რას უდრის BKD სამკუთხედისა და $DKAC$ ოთხკუთხედის ფართობების შეფარდება?

ამოხსნა



სამკუთხედში გავავლოთ AH სიმაღლე.
ვთქვათ, $AB=AC=a,\ BD=x,\ \ \angle ABC=\alpha$, მაშინ
$BK=x\cos\alpha$, $KD=x\sin\alpha$, $AK=a-x\cos\alpha$,
$BC=2BH=2a\cos\alpha$, $DC=2a\cos\alpha-x$.
გვაქვს
$P_{BKD}=P_{DKAC}\ \Leftrightarrow\ x+x\cos\alpha+x\sin\alpha=x\sin\alpha+a-x\cos\alpha+a+2a\cos\alpha-x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x(1+\cos\alpha)=2a(1+\cos\alpha) \Leftrightarrow x=a$.

ამრიგად,

$$S_{BKD}:S_{DKAC}=S_{BKD}:(S_{ABC}-S_{BKD})=\frac{x\cos\alpha\cdot x\sin\alpha}{2}:\left(\frac{a\sin\alpha\cdot 2a\cos\alpha}{2}-\frac{x\cos\alpha\cdot x\sin\alpha}{2}\right)=$$

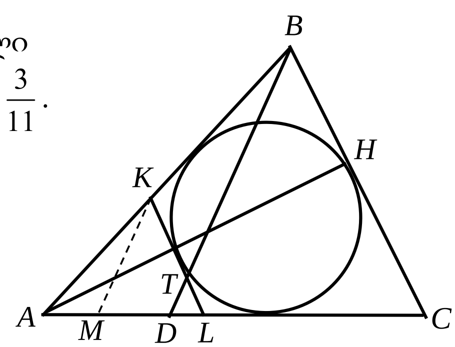
$$=\frac{a\cos\alpha\cdot a\sin\alpha}{2}:\frac{a\cos\alpha\cdot a\sin\alpha}{2}=1:1$$

პასუხი: $S_{BKD}:S_{DKAC}=1:1$.

ამოცანა 5 — 5 ქულა

ABC სამკუთხედში BC გვერდის სიგრძე სამკუთხედის პერიმეტრის $\frac{3}{11}$ ნაწილის ტოლია. AC გვერდზე აღებულია D წერტილი ისე, რომ $AC=4AD$. K და L წერტილები აღებულია შესაბამისად AB და AC გვერდებზე ისე, რომ $KL \parallel BC$ და KL ეხება ABC სამკუთხედში ჩახაზულ წრეწირს. რა შეფარდებით გაყოფს BD მონაკვეთი KL მონაკვეთს?

ამოხსნა



ვთქვათ, ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია R, ხოლო AH არის A წვეროდან გავლებული სიმაღლე. მაშინ $S_{ABC}=\frac{P_{ABC}}{2}\cdot R=\frac{BC\cdot AH}{2} \Rightarrow \frac{R}{AH}=\frac{BC}{P_{ABC}}=\frac{3}{11}$.

ΔAKL მსგავსია ΔABC, ამიტომ

$$\frac{AL}{AC}=\frac{AK}{AB}=\frac{AH-2R}{AH}=1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11} \Rightarrow AL=\frac{5AC}{11}.$$

K წერტილიდან გავავლოთ BD-ს პარალელური KM მონაკვეთი. ცხადია, ΔAKM მსგავსია ΔABD, ამიტომ $\frac{AM}{AD}=\frac{AK}{AB}=\frac{AL}{AC}=\frac{5}{11} \Rightarrow AM=\frac{5}{11}AD=\frac{5}{11}\cdot\frac{AC}{4}=\frac{5AC}{44}$.

ამრიგად, $MD=AD-AM=\frac{AC}{4}-\frac{5AC}{44}=\frac{3}{22}AC$. $DL=AL-AD=\frac{5AC}{11}-\frac{AC}{4}=\frac{9AC}{44}$.

ვინაიდან $KM \parallel BD$, ამიტომ $\frac{KT}{TL}=\frac{MD}{DL}=\frac{3AC}{22}:\frac{9AC}{44}=\frac{2}{3}$.

პასუხი: $2:3$