ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა მათემატიკაში

2018-2019 სასწავლო წელი

II ტური X კლასი

ამოცანა 1 — 5 ქულა

იპოვეთ ყველა ის ორნიშნა ნატურალური რიცხვი, რომელსაც გააჩნია თვისება: თუ რიცხვის ჩანაწერში მონაწილე ორივე ციფრს გავზრდით 1-ით და გადავამრავლებთ, მივიღებთ რიცხვს, რომელიც 9-ით ნაკლები იქნება თავიდან მოცემულ რიცხვზე.

ამოხსნა

ვთქვათ $\overline{ab}=10a+b$ საძიებელი რიცხვია. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, გვექნება განტოლება $10a+b-(a+1)(b+1)=9,$ რომელიც ტოლფასია განტოლების $a(9-b)=10.$

გვექნება შემთხვევები:

1) $a=1$, ამ შემთხვევაში b უარყოფითია;

2) $a=2$, მაშინ $b=4$;

3) $a=5$, მაშინ $b=7$.

პასუხი: $24, 57$.

ამოცანა 2 — 5 ქულა

მოცემულია ისეთი $p(x)=x^2+bx+c$ კვადრატული სამწევრი, რომ $p(x)=0$ განტოლებას ამონახსნი არ გააჩნია. ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის ავაგოთ $p_n(x)$ კვადრატული სამწევრი შემდეგი წესით: $p_1(x)=p(x+2019)-2019$, $p_n(x)=p_{n-1}(x+2019)-2019,\ n\geq 2.$ აჩვენეთ, რომ იარსებებს ისეთი ნატურალური რიცხვი n, რომ $p_n(x)=0$ განტოლებას ექნება ორი განსხვავებული ამონახსნი.

ამოხსნა

$p(x)=x^2+bx+c$ კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი ტოლია $D=b^2-4c$.

$p_1(x)=p(x+2019)-2019=x^2+(2\cdot 2019+b)x+\left(2019^2+2019b+c-2019\right)$ კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი ტოლი იქნება $D_1=b^2-4c+4\cdot 2019=D+4\cdot 2019$. ანალოგიურად დავასკვნით, რომ ნებისმიერი $n\geq 2$ ნატურალური რიცხვისათვის $p_n(x)$ კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი ტოლი იქნება $D_n=D+4\cdot 2019n$. მაშასადამე, მოიძებნება ისეთი n ნატურალური რიცხვი, რომ $D_n=D+4\cdot 2019n>0.$

ამოცანა 3 5 ქულა

$a_1, a_2, \ldots$ და $b_1, b_2, \ldots$ რიცხვითი მიმდევრობები შესაბამისად არითმეტიკულ და გეომეტრიულ პროგრესიებს წარმოადგენს. ცნობილია, რომ $a_{30} = \sqrt{b_{10} b_{50}}$, $a_{40} + a_{100} = 2b_{70} > 0.$ აჩვენეთ, რომ $a_{50} \geq b_{50}$.

ამოხსნა

ამოცანის პირობები გადავწეროთ ასე:

$a_{30} = |b_{30}|$, $a_{70} = b_{70} > 0.$ ვინაიდან $b_{30} = \dfrac{b_{70}}{q^{40}} > 0$, ამიტომ $a_{30} = b_{30}$.

გვექნება

$$a_{50} = \frac{a_{30} + a_{70}}{2} = \frac{b_{30} + b_{70}}{2} = b_{50} \frac{q^{-20} + q^{20}}{2} \geq b_{50},$$

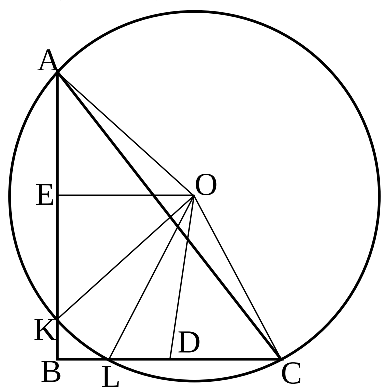
ვინაიდან $\dfrac{q^{-20} + q^{20}}{2} > 1,$ როცა $|q| \neq 1$, ხოლო ტოლობა მიიღწევა, როცა $|q| = 1$.

ამოცანა 4 5 ქულა

წრეწირი, რომლის რადიუსია $\sqrt{65}$, გადის ABC მართკუთხა სამკუთხედის A და C წვეროებზე და კვეთს AB და BC კათეტებს. K წერტილი წრეწირისა და AB კათეტის გადაკვეთის წერტილია. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ჰიპოტენუზა, თუ ცნობილია, რომ $AK = 14$ და $KB = 1$.

ამოხსნა

O ცენტრიდან AB და BC კათეტებზე დავუშვათ შესაბამისად OE და OD მართობები.
შევნიშნოთ, რომ $AE = AK/2 = 7$ და $BE = BK + KE = 8$.
AEO მართკუთხა სამკუთხედიდან გვექნება $EO = 4$.
$BEOD$ მართკუთხედში გვექნება
$OE = BD = 4, BE = OD = 8.$ ODC მართკუთხა სამკუთხედიდან $CD = 1$. გვექნება $BC = BD + CD = 5$.
საბოლოოდ მივიღებთ $AC = 5\sqrt{10}$.

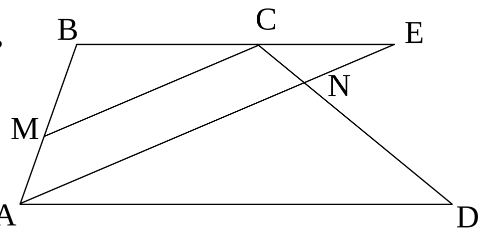


პასუხი: $AC = 5\sqrt{10}$.

ამოცანა 5 5 ქულა

$ABCD$ ტრაპეციის AB და CD ფერდებზე შესაბამისად აღებულია M და N წერტილები ისე, რომ $AM:MB=3:2$, ხოლო AN და MC წრფეები პარალელურია. ცნობილია, რომ $AMCN$ ტრაპეციის ფართობი $ABCD$ ტრაპეციის ფართობის 54%-ს წარმოადგენს. იპოვეთ $AD:BC$.

ამოხსნა



ვთქვათ $BC=x$, ხოლო $AD=kx$. გვაქვს $S_{BCM}+S_{ADN}=0,46S$, სადაც S არის $ABCD$ ტრაპეციის ფართობი. ვთქვათ $ABCD$ ტრაპეციის სიმაღლეა h. მაშინ BCM სამკუთხედში M წერტილიდან გავლებული სიმაღლე ტოლი იქნება $\frac{2}{5}h.$

შევნიშნოთ, რომ ADN და CEN სამკუთხედები მსგავსია, აგრეთვე MBC და ABE სამკუთხედები მსგავსია. გვექნება $CE:BC=AM:MB=3:2$, მაშასადამე $CE=\frac{3}{2}x$ და ADN და CEN სამკუთხედების მსგავსების კოეფიციენტია $\frac{kx}{(3/2)x}=\frac{2k}{3}$. ვთქვათ, ADN სამკუთხედის N წვეროდან გავლებული სიმაღლეა h_1, მაშინ CEN სამკუთხედის N წვეროდან გავლებული სიმაღლე ტოლია $h-h_1$. გვექნება $\frac{h-h_1}{h_1}=\frac{3}{2k}$, საიდანაც მივიღებთ $h_1=\frac{2kh}{2k+3}$.

რადგან $S_{BCM}+S_{ADN}=0,46S$, ვღებულობთ განტოლებას

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}h\cdot x+\frac{1}{2}\cdot kx\cdot\frac{2kh}{2k+3}=0,46\cdot\frac{1}{2}\cdot h\cdot x(1+k)$. საბოლოოდ გვექნება განტოლება $18k^2-25k-3=0$, რომლის დადებითი ამონახსნია $k=3/2$.

პასუხი: $\frac{3}{2}$.

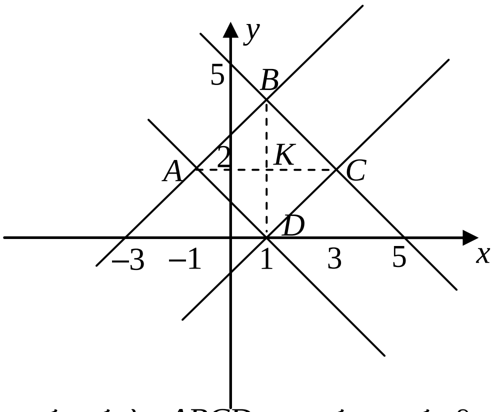
ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა მათემატიკაში
2018-19 სასწავლო წელი
II ტური XI-XII კლასი

ამოცანა 1 5 ქულა

მართკუთხა საკოორდინატო სიბრტყეზე დაშტრიხულია ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებს უტოლობას: $|x-1|+|y-2|\le 2$. იპოვეთ დაშტრიხული ფიგურის ფართობი.

ამოხსნა

ვთქვათ $x\ge 1,\ y\ge 2$. მაშინ $x-1+y-2\le 2 \Leftrightarrow y\le 5-x$; მივიღებთ ΔKBC-ს შიგა არეს;
ვთქვათ $x\ge 1,\ y\le 2$. მაშინ $x-1-y+2\le 2 \Leftrightarrow y\ge x-1$; მივიღებთ ΔKDC-ს შიგა არეს;
ვთქვათ $x\le 1,\ y\ge 2$. მაშინ $-x+1+y-2\le 2 \Leftrightarrow y\le x+3$; მივიღებთ ΔKBA-ს შიგა არეს;
ვთქვათ $x\le 1,\ y\le 2$. მაშინ $-x+1-y+2\le 2 \Leftrightarrow y\ge 1-x$; მივიღებთ ΔKAD-ს შიგა არეს;



ამრიგად დაშტრიხული ფიგურა არის $ABCD$ კვადრატი, რომლის გვერდია $2\sqrt{2}$, ამიტომ ფართობი იქნება 8.

პასუხი: 8.

ამოცანა 2 5 ქულა

იპოვეთ მთელ რიცხვთა ყველა ისეთი $(m;n)$ წყვილი, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა $9n^2=m^2+5$.

ამოხსნა

გვაქვს $9n^2=m^2+5 \Leftrightarrow (3n-m)(3n+m)=5$. ვინაიდან 5 მარტივი რიცხვია, განვიხილავთ შემდეგ შესაძლებელ შემთხვევებს:

ა) $\begin{cases}3n-m=5\\3n+m=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=-2\\n=1\end{cases}$; ბ) $\begin{cases}3n-m=1\\3n+m=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=2\\n=1\end{cases}$;

გ) $\begin{cases}3n-m=-5\\3n+m=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=2\\n=-1\end{cases}$; დ) $\begin{cases}3n-m=-1\\3n+m=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=-2\\n=-1\end{cases}$.

პასუხი: $(-2;1),\ (2;1),\ (2;-1),\ (-2;-1)$.

ამოცანა 3 5 ქულა

საფეხბურთო ჩემპიონატის განმავლობაში მონაწილე გუნდებიდან ყოველი ორი გუნდი ერთმანეთს უნდა შეხვდეს ზუსტად ერთხელ. ორმა გუნდმა ხუთ-ხუთი თამაშის ჩატარების შემდეგ დატოვა ჩემპიონატი, ხოლო დანარჩენებმა გააგრძელეს ბოლომდე. შეხვდა თუ არა ეს ორი გუნდი ერთმანეთს, თუ ცნობილია, რომ ჩემპიონატის განმავლობაში სულ ჩატარდა 38 თამაში.

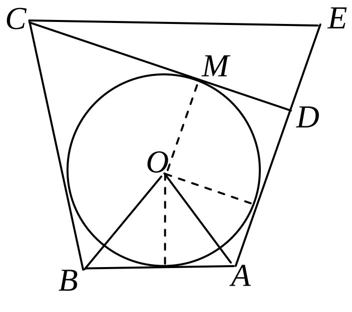
ამოხსნა

ვთქვათ ჩემპიონატში მონაწილეობს n გუნდი. მაშინ სულ უნდა შემდგარიყო $\frac{n(n-1)}{2}$ თამაში. აქედან იმ გუნდებს, რომლებმაც ჩემპიონატი ვადაზე ადრე დატოვეს, უნდა ეთამაშა $2(n-2)+1$ თამაში. სინამდვილეში მათ ითამაშეს 9 (თუ ისინი ერთმანეთს შეხვდნენ) ან 10 (თუ ერთმანეთს არ შეხვედრიან) თამაში. ამიტომ ჩემპიონატზე გათამაშდა სულ $\frac{n(n-1)}{2}-2(n-2)-1+9=\frac{(n-2)(n-3)}{2}+9$ ან $\frac{(n-2)(n-3)}{2}+10$ თამაში. განტოლებებიდან $\frac{(n-2)(n-3)}{2}+10=38$ და $\frac{(n-2)(n-3)}{2}+9=38$ ნატურალური ამონახსნი ($n=10$) გააჩნია მხოლოდ პირველ განტოლებას, ამიტომ ის ორი გუნდი, რომლებმაც ჩემპიონატი დატოვეს, ერთმანეთს არ შეხვედრიან.

ამოცანა 4 5 ქულა

წრეწირი ეხება $ABCD$ ოთხკუთხედის ოთხივე გვერდს. ცნობილია, რომ $\angle CDA=90^\circ$ და $\angle DAB=\angle ABC=120^\circ$. იპოვეთ $ABCD$ ოთხკუთხედის პერიმეტრი, თუ $AB=3\sqrt{3}-5$.

ამოხსნა



ვთქვათ $AB=a$, წრეწირის რადიუსი არის R და ცენტრი არის O წერტილი. ცხადია, რომ BO და AO იქნება $\angle B$-ს და $\angle A$-ს ბისექტრისები, ამიტომ $\angle OAB=\angle OBA=60^\circ$, მაშასადამე ΔAOB ტოლგვერდაა, საიდანაც $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C წერტილზე გავავლოთ AB-ს პარალელური წრფე AD წრფესთან გადაკვეთამდე E წერტილში. ცხადია, რომ $ABCE$ იქნება ტოლფერდა ტრაპეცია და CDE მართკუთხა სამკუთხედში $\angle E=60^\circ$. გვაქვს:

$CB=AE=AD+DE=\frac{a}{2}+R+\frac{CD}{\sqrt{3}}$. რადგან წრეწირი ეხება $ABCD$ ოთხკუთხედის ოთხივე გვერდს, ამიტომ $BA+CD=BC+AD$, ე. ი.

$$a+CD=2(\frac{a}{2}+R)+\frac{CD}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a+CD=a+2\frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{CD}{\sqrt{3}} \Rightarrow CD=\frac{a\sqrt{3}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{3a(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

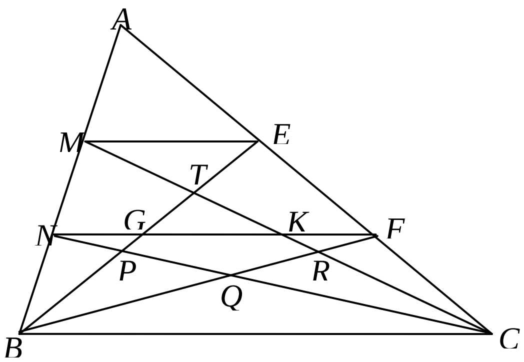
ამრიგად $P_{ABCD}=2(AB+CD)=2a+3a(\sqrt{3}+1)=a(5+3\sqrt{3})=(3\sqrt{3}-5)(5+3\sqrt{3})=2$

პასუხი: 2.

ამოცანა 5 **5 ქულა**

ABC სამკუთხედის AB გვერდზე აღებულია M და N წერტილები ისე, რომ $AM = MN = NB$, ხოლო AC გვერდზე აღებულია E და F წერტილები ისე, რომ $AE = EF = FC$. CN მონაკვეთი BE და BF მონაკვეთებს კვეთს შესაბამისად P და Q წერტილებში, CM მონაკვეთი კი BE და BF მონაკვეთებს კვეთს შესაბამისად T და R წერტილებში. იპოვეთ $PQRT$ ოთხკუთხედის ფართობი, თუ ABC სამკუთხედის ფართობი არის 70-ის ტოლი.

ამოხსნა



შევაერთოთ M და E, ასევე N და F წერტილები. ცხადია, რომ $ME \parallel NF \parallel BC$. ამიტომ AME, ANF და ABC სამკუთხედები მსგავსია, საიდანაც $ME = \frac{1}{3}BC$ და $NF = \frac{2}{3}BC$. ვთქვათ $S_{ABC} = S$.

MTE და CTB სამკუთხედების მსგავსებიდან გვექნება $\frac{MT}{TC} = \frac{ME}{BC} = \frac{1}{3}$, საიდანაც $TC = \frac{3}{4}MC$.

მაშინ $S_{BTC} = \frac{3}{4}S_{BMC} = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}S_{ABC} = \frac{1}{2}S$.

NFQ და CBQ სამკუთხედების მსგავსებიდან გვექნება $\frac{FQ}{BQ} = \frac{NF}{BC} = \frac{2}{3}$, საიდანაც $BQ = \frac{3}{5}BF$.

მაშინ $S_{BQC} = \frac{3}{5}S_{BFC} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{5}S$. ცხადია, რომ $KF = \frac{1}{2}ME = \frac{1}{6}BC$. ამიტომ KFR და CBR სამკუთხედების მსგავსებიდან გვექნება $\frac{RF}{BR} = \frac{KF}{BC} = \frac{1}{6}$, საიდანაც $BR = \frac{6}{7}BF$. შესაბამისად $QR = BR - BQ = \frac{6}{7}BF - \frac{3}{5}BF = \frac{9}{35}BF$. ამიტომ $S_{QRC} = \frac{9}{35}S_{BFC} = \frac{9}{35}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{3}{35}S$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $S_{BPQ} = \frac{3}{35}S$.

ამრიგად $S_{PTRQ} = S_{BTC} - S_{BQC} - S_{QRC} - S_{BPQ} = \frac{1}{2}S - \frac{1}{5}S - \frac{3}{35}S - \frac{3}{35}S = \frac{9}{70}S = 9$.

პასუხი: 9.