მასწავლებლის კომპეტენციის დადასტურება
ტესტი მათემატიკაში (2018 წელი)

პასუხები

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ბ	გ	ა	ა	გ	დ	ბ	ა	ბ	დ	დ	ა	ბ	ა	ბ

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
დ	დ	გ	ა	ა	ბ	ა	გ	გ	დ	ბ	გ	დ	დ	გ

ამოცანა 31 **10 ქულა**

თემის „ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობების გამოსათვლელი ფორმულები ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობისათვის" შესწავლის შემდეგ მოსწავლეებს საშინაო დავალებად ჰქონდათ შემდეგი ამოცანა:

„იპოვეთ $f(x)=2\cos x-7\sin x$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა."

ერთ-ერთმა მოსწავლემ ეს ამოცანა შემდეგნაირად ამოხსნა:

„რადგან $f(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს $2\cos x$ და $7\sin x$ ფუნქციების სხვაობას, ამიტომ $f(x)$-ის მაქსიმალური მნიშვნელობის საპოვნელად უნდა ავიღოთ $2\cos x$-ის მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომელიც 2-ის ტოლია და $7\sin x$-ის მინიმალური მნიშვნელობა, რომელიც -7-ის ტოლია. ამიტომ $f(x)$-ის მაქსიმალური მნიშვნელობაა 2-(-7)=9."

თქვენი დავალებაა:

1) გაახსენოთ მოსწავლეებს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების: სინუსის, კოსინუსის და ტანგენსის მნიშვნელობების გამოსათვლელი ფორმულები ორი არგუმენტის ჯამისათვის. ტანგენსის შემთხვევაში $\operatorname{tg}(x+y)$ წარმოადგინეთ $\operatorname{tg}x$ და $\operatorname{tg}y$ -ის საშუალებით და მიუთითეთ არგუმენტების ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, როდესაც ეს უკანასკნელი ფორმულა ჭეშმარიტია. (4 ქულა)

2) აუხსენით მოსწავლეს რა შეცდომა დაუშვა მან ამოხსნაში. (1 ქულა)

3) ამოხსენით ამოცანა და დამატებით მიუთითეთ არგუმენტის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $f(x)$ ფუნქცია იღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. მსჯელობა აწარმოეთ ნათლად, მოსწავლისთვის გასაგებ ენაზე. (5 ქულა)

პასუხის ერთ-ერთი ვარიანტი რომელიც მაქსიმალური ქულით შეფასდება:

31.1) ორი არგუმენტის ჯამისთვის სამართლიანია შემდეგი ტრიგონომეტრიული იგივეობები:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

და

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}.$$

შევნიშნოთ, რომ ტანგენსის შემთხვევაში ფორმულა სამართლიანია, როდესაც $1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\neq 0$, ანუ $\cos x\neq 0$, $\cos y\neq 0$ და $\cos(x+y)\neq 0$, საიდანაც მივიღებთ $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ და $x+y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

31.2) საზოგადოდ ორი ფუნქციის ჯამის მაქსიმუმი ნაკლებია ან ტოლი ამ ფუნციების მაქსიმუმების ჯამზე. ტოლობას ადგილი აქვს თუ ორივე ფუნქცია ერთსა და იმავე წერტილში აღწევენ მაქსიმუმს. რადგან $\cos x$ და $-\sin x$ სხვადასხვა წერტილებში აღწევენ მაქსიმუმს, ამიტომ მოსწავლემ შეცდომა დაუშვა, როდესაც $2\cos x$ -ის და $-7\sin x$ მაქსიმუმები შეკრიბა.

31.3) $f(x)=2\cos x-7\sin x=\sqrt{53}\left(\frac{2}{\sqrt{53}}\cos x-\frac{7}{\sqrt{53}}\sin x\right)=\sqrt{53}\cos(\alpha+x)$, სადაც $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{7}{2}$ **.**

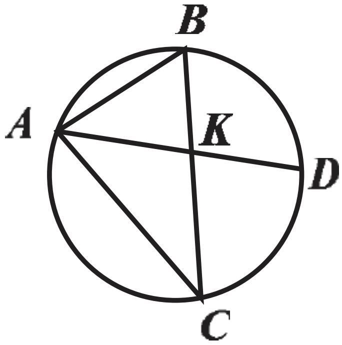
მართლაც, რადგან $\left(\frac{2}{\sqrt{53}},\frac{7}{\sqrt{53}}\right)$ წერტილი ერთეულოვან წრეწირზე მდებარეობს, ამიტომ არსებობს ისეთი α კუთხე, რომლისთვისაც $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{53}}$ და $\sin\alpha=\frac{7}{\sqrt{53}}$, საიდანაც მივიღებთ, რომ $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{7}{2}$. ამიტომ $f(x)$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობაა $\sqrt{53}$, რომელსაც იგი მიაღწევს როდესაც $\alpha+x=2\pi k$, ანუ $x=-\operatorname{arctg}\frac{7}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ წერტილებში.

ამოცანა 32 **5 ქულა**

ABC სამკუთხედზე შემოხაზულია წრეწირი. D წერტილი წარმოადგენს BC რკალის შუა წერტილს და AD ქორდა BC ქორდას კვეთს K წერტილში. იპოვეთ AK მონაკვეთის სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ $AC = 21$ სმ, $BC = 24$ სმ და $\cos\angle ACB = \frac{11}{14}$.

ამოხსნა

კოსინუსების თეორემის გამოყენებით ვიპოვოთ AB გვერდის სიგრძე.



$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AB \cdot CB \cos\angle ACB =$

$= 441 + 576 - 2 \cdot 21 \cdot 24 \cdot \frac{11}{14} = 225$

$AB = 15$ სმ.

რადგან BD რკალის გრადუსული ზომა ტოლია DC რკალის გრადუსული ზომის, ამიტომ $\angle BAD = \angle CAD$ და AK მონაკვეთი წარმოადგენს BAC კუთხის ბისექტრისას.

BAC სამკუთხედში ბისექტრისის თვისების გამოყენებით გვაქვს:

$\frac{BK}{CK} = \frac{AB}{AC} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$.

მაშინ, $BK = \frac{5}{12} \cdot BC = 10$ სმ და $CK = BC - BK = 14$ სმ.

$AK^2 = AC^2 + CK^2 - 2AC \cdot CK \cos\angle ACK =$

$= 441 + 196 - 2 \cdot 21 \cdot 14 \cdot \frac{11}{14} = 175$

პასუხი: $AK = 5\sqrt{7}$ სმ.

ამოცანა 33 **7 ქულა**

ნავთობის კომპანიას აქვს ორი ქარხანა. პირველი ქარხანა დღეში აწარმოებს შესაბამისად 100, 300 და 400 ტონა მაღალი, საშუალო და დაბალი ხარისხის საწვავს. მეორე ქარხანა დღეში აწარმოებს შესაბამისად 200, 100 და 300 ტონა მაღალი, საშუალო და დაბალი ხარისხის საწვავს. თითოეული ქარხნის დღიური დანახარჯი 20000 ლარს შეადგენს. რამდენ-რამდენი დღე უნდა ამუშაოს ნავთობის კომპანიამ თითოეული ქარხანა, რომ მინიმალური დანახარჯით დაამზადოს არანაკლებ 9000 ტონა მაღალი ხარისხის, 12000 ტონა საშუალო ხარისხის და 26000 ტონა დაბალი ხარისხის საწვავი?

პასუხის ერთ-ერთი ვარიანტი რომელიც მაქსიმალური ქულით შეფასდება:

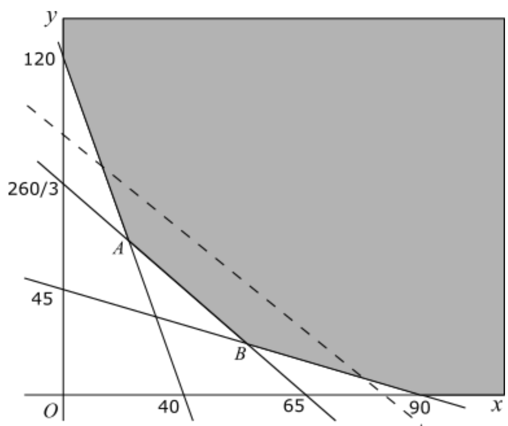
ვთქვათ, ნავთობის კომპანიამ პირველი ქარხანა უნდა ამუშაოს x დღე, ხოლო მეორე - y დღე. მაშინ ამოცანის პირობის თანახმად გვექნება შემდეგი წრფივი დაპროგრამების ამოცანა:

ვიპოვოთ, x და y ცვლადების მნიშვნელობები, რომელთათვისაც $20000(x+y)$ გამოსახულება ღებულობს უმცირეს მნიშვნელობას, თუ x და y ცვლადები აკმაყოფილებს პირობებს

$$\begin{cases} 100x+200y \geq 9000 \\ 300x+100y \geq 12000 \\ 400x+300y \geq 26000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y \geq 90 \\ 3x+y \geq 120 \\ 4x+3y \geq 260 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

ამოვხსნათ მოცემული წრფივი დაპროგრამების ამოცანა გრაფიკული მეთოდით, ამისთვის ავაგოთ $x+2y=90$, $3x+y=120$, $4x+3y=260$, $x=0$, $y=0$ წრფეების გრაფიკები Oxy საკოორდინატო სიბრტყეზე. ამასთან შევნიშნოთ, რომ საკმარისია ვეძებოთ $x+y$ -ის უმცირესი მნიშვნელობა.

(1) უტოლობათა სისტემას Oxy საკოორდინატო სიბრტყეზე შეესაბამება გამუქებული არე, იხ. სურათი. სადაც $A(20; 60)$ წერტილი წარმოადგენს $3x+y=120$ და $4x+3y=260$ წრფეების გადაკვეთის წერტილს, ხოლო $B(50; 20)$ წერტილი წარმოადგენს $x+2y=90$ და $4x+3y=260$ წრფეების გადაკვეთის წერტილს.



თუ $x+y$ -ის მნიშვნელობას აღვნიშნავთ k -თი, მაშინ ჩვენი მიზანია k -შევარჩიოთ რაც შეიძლება მცირე ისე, რომ $x+y=k$ წრფე (სურათზე წყვეტილი ხაზებით მოცემული) გადიოდეს გამუქებული არის ერთ წერტილზე მაინც.

სურათის მიხედვით ადვილი დასანახია, რომ k-ს თანდათანობით შემცირებით, $x+y$ უმცირეს მნიშვნელობას მიიღებს, თუ $x+y=k$ წრფე გაივლის A ან B წერტილში. მათ შორის კი $x+y$ უმცირეს მნიშვნელობას მიიღებს B წერტილში, $x+y=70$.

პასუხი: პირველი ქარხანა - 50 დღე, მეორე ქარხანა - 20 დღე.