

Тест по математике

Инструкция

Перед Вами электронный буклет экзаменационного теста.

Тест состоит из 33 задач.

Решение задач 31-33 должно быть записано в специально отведенном для них месте на листе ответов. В Вашей записи должен быть четко представлен путь решения задачи.

Учтите, что размеры чертежей, прилагаемых к некоторым задачам, могут не соответствовать указанным в условиях размерам. Поэтому не следует делать выводы о длинах отрезков или других величинах на основании размеров чертежа. Руководствуйтесь условием задачи.

Максимальная оценка теста – 52 балла.

Для выполнения работы Вам отводится 5 часов.

Желаем успеха!



Задача 1**1 балл**

Вычислите разность бесконечных периодических десятичных дробей $1,0(84)-0,(9)$.

а) $\frac{81}{990}$

б) $\frac{14}{165}$

в) $\frac{41}{330}$

г) $\frac{16}{155}$

Задача 2**1 балл**

Элементами множества A являются простые числа. Известно, что 5% элементов множества A делятся на 11. Сколько элементов содержит множество A ?

а) 60

б) 50

в) 20

г) 10

Задача 3**1 балл**

Если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2 + 4x - 3 = 0$, то $|x_1 - x_2| =$

а) $2\sqrt{7}$

б) 4

в) $2(\sqrt{7} - 2)$

г) $2(\sqrt{7} + 2)$

Задача 4**1 балл**

Если обозначим количество вершин многогранника через V , количество ребер через E , а количество граней через F , то какое равенство из перечисленных ниже истинно?

а) $V - E + F = 2$

б) $V - F + E = 2$

в) $E + F - V = 2$

г) $E - V - F = 2$

Задача 5**1 балл**

Для простого числа p и целого числа q справедливо равенство $14p + 4q = 0$. Найти значение выражения $p + q$.

а) -10 б) -9 в) -5 г) 9

Задача 6**1 балл**

Найти k , если известно, что при делении многочлена $P(x) = (3x - 2)(2x - k)$ на многочлен $Q(x) = x + 1$ в остатке получится -11 .

а) 13

б) $-\frac{1}{5}$

в) -22

г) $-\frac{21}{5}$

Задача 7**1 балл**

Найти сумму параметров a и b , если известно, что выражения $(2x-3y)^2$ и $4x^2 - axy - by^2$ тождественно равны.

а) -3

б) 3

в) 12

г) 21

Задача 8**1 балл**

Найти длину векторного произведения векторов $\vec{a} = (1; -1; 2)$ и $\vec{b} = (3; -3; 6)$.

а) 0

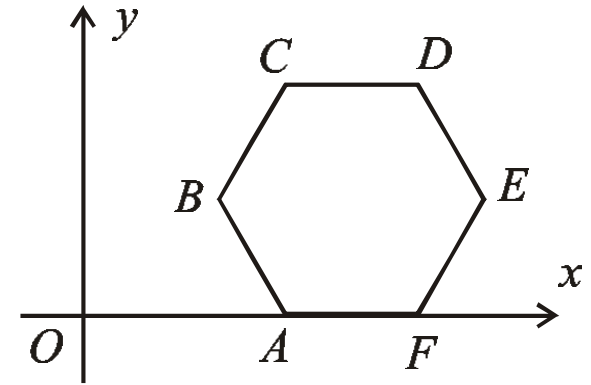
б) 18

в) $3\sqrt{6}$ г) $6\sqrt{3}$

Задача 9

1 балл

В прямоугольной системе координат Oxy дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, сторона AF , которого лежит на оси абсцисс (см. рисунок). Найти длину отрезка OA , если известно, что $AB = 4$ см и координаты точки E равны $(12; 2\sqrt{3})$.



а) 2 см

б) 6 см

в) 7 см

г) 10 см

Задача 10**1 балл**

Какое из следующих высказываний:

$$1) (A \wedge B) \Rightarrow A; \quad 2) (A \vee B) \Rightarrow A; \quad 3) A \Rightarrow (A \wedge B); \quad 4) A \Rightarrow (A \vee B),$$

истинно для любых высказываний A и B ?

- а) Только четвертое;
- б) Только второе и третье;
- в) Только первое и третье;
- г) Только первое и четвертое.

Задача 11**1 балл**

Переведите число 58 из десятичной системы счисления в двоичную систему счисления.

а) 101110

б) 101010

в) 110010

г) 111010

Задача 12**1 балл**

Количество двухэлементных подмножеств множества A равно 36. Сколько трехэлементных подмножеств имеет множество A ?

а) 84

б) 78

в) 72

г) 64

Задача 13**1 балл**

Для некоторого значения параметра t числа $3t-5$, $t-5$, t являются первыми тремя членами возрастающей геометрической прогрессии. Найти девятый член этой прогрессии.

а) $-\frac{5}{16}$

б) $-\frac{5}{64}$

в) $-\frac{3}{16}$

г) $-\frac{3}{64}$

Задача 14**1 балл**

Решите уравнение $\log_2(\log_2 x) = 1 + \log_2 3 \cdot \log_3 5$.

а) 2^{10}

б) 2^{15}

в) 2^8

г) 2^5

Задача 15**1 балл**

Найти сумму координат точки, лежащей на прямой $y = x + 1$, которая одинаково удалена от точки $(5; -2)$ и от начала прямоугольной системы координат Oxy .

- а) 10
- б) 12
- в) 16
- г) $35/2$

Задача 16**1 балл**

Из десяти студентов 60% - девочки. Из этих десяти студентов случайным образом выбрали двух студентов. Найти вероятность того, что среди выбранных студентов есть хотя бы одна девочка.

а) $\frac{8}{15}$

б) $\frac{2}{15}$

в) $\frac{4}{15}$

г) $\frac{13}{15}$

Задача 17

1 балл

Какому из ниже перечисленных чисел может быть равным остаток, полученный при делении числа a на 14, если $a \equiv 3 \pmod{7}$?

- а) 5 б) 6 в) 8 г) 10

Задача 18**1 балл**

Найти множество всех значений параметра a , для которых система уравнений

$$\begin{cases} x + \frac{y}{3} = a \\ \frac{x}{2} + a^2 y = -\frac{1}{2\sqrt{6}} \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений.

а) $\left\{ -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\}$

б) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \right\}$

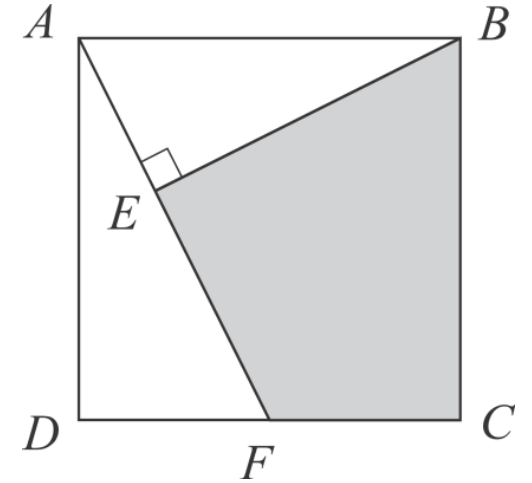
в) $\left\{ -\frac{1}{\sqrt{6}} \right\}$

г) $\left\{ \frac{1}{6} \right\}$

Задача 19

1 балл

Точка F - середина стороны DC единичного квадрата $ABCD$. На отрезок AF опущена высота BE (см. рисунок). Найти площадь закрашенного четырехугольника $BCFE$.



а) $\frac{11}{20}$

б) $\frac{3}{10}$

в) $\frac{7}{10}$

г) $\frac{3}{4}$

Задача 20**1 балл**

Найдите k , если векторы $\vec{a} = (k - 2, k)$ и $\vec{b} = (3, 7)$ коллинеарны.

а) $\frac{7}{2}$

б) $-\frac{3}{2}$

в) $\frac{3}{5}$

г) 1

Задача 21**1 балл**

Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии b_1, b_2, \dots , если известно, что ее сумма равна 8, а сумма бесконечной последовательности b_2, b_4, b_6, \dots , составленной из членов данной прогрессии с четными индексами равна 3.

а) $\frac{5}{11}$

б) $\frac{3}{5}$

в) $\frac{5}{8}$

г) $\frac{3}{8}$

Задача 22**1 балл**

В прямоугольной системе координат Oxy кривую, определенную уравнением $y^2 - 6y - 4x = -29$, повернули вокруг начала системы координат на 90° по часовой стрелке. Найдите уравнение полученной кривой.

а) $x^2 - 6x + 4y = -29$

б) $y^2 + 6y - 4x = -29$

в) $x^2 + 6x + 4y = -29$

г) $y^2 + 6y + 4x = -29$

Задача 23**1 балл**

Найти множество всех значений параметра m , для которых уравнение $\cos(\sin x) = m$ имеет решение.

а) $[0; \cos 1]$ б) $[-1; 1]$ в) $[\cos 1; 1]$ г) $[0; 1]$

Задача 24**1 балл**

Для некоторых действительных чисел a и b , комплексные числа $5 - i$ и $2a + b + (3a - b)i$ равны. Найти $a - b$.

с) $\frac{4}{3}$

д) -3

ж) $-\frac{13}{5}$

з) $-\frac{12}{5}$

Задача 25**1 балл**

Найти среднее значение числовых данных: x ; y ; 2; 7; 9; 11, если известно, что медиана этих данных равна 6, а мода равна 2.

с) $\frac{35}{6}$

д) $\frac{17}{3}$

ж) $\frac{37}{6}$

з) 6

Задача 26**1 балл**

Найти угол между диагоналями куба.

а) 90°

б) $\arccos \frac{1}{3}$

в) $\arcsin \frac{2}{3}$

г) 45°

Задача 27**1 балл**

В прямоугольной системе координат Oxy проведена прямая, которая касается графика функции $y = \ln x$ в точке $(e; 1)$. Найдите абсциссу точки пересечения этой прямой с осью Ox .

а) -1

б) -0,1

в) 0

г) 0,1

Задача 28**1 балл**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cdot \cos x) dx =$$

а) $\sqrt{2} + 1$

б) 1

в) $\sqrt{2}$

г) 0,5

Задача 29**1 балл**

Чему равен предел последовательности a_1, a_2, a_3, \dots , если предел последовательности a_1, a_3, a_5, \dots равен 2, а предел последовательности a_2, a_4, a_6, \dots равен 10.

а) 6

б) 8

в) 12

г) не имеет предела

Задача 30**1 балл**

Площадь треугольника ABC , лежащей на плоскости α , равна 3, а площадь фигуры, полученной при ортогональном проектировании треугольника ABC на плоскость β , равна 2. Найдите двугранный угол между плоскостями α и β .

а) $\arctg \frac{2}{3}$

б) $\arcsin \frac{2}{3}$

в) $\arccos \frac{2}{3}$

г) $\arctg \frac{3}{2}$

Задача 31**10 баллов**

При прохождении темы "Тригонометрические функции суммы и разности двух аргументов" ученикам задали на дом следующее задание:

„Найдите максимальное значение функции $f(x) = 2\cos x - 7\sin x$ “

Один из учеников решил эту задачу следующим образом:

"Так как функция $f(x)$ представляет собой разность функций $2\cos x$ и $7\sin x$, то для нахождения максимального значения функции $f(x)$, мы должны отнять от максимального значения $2\cos x$, которое равно 2, минимальное значение $7\sin x$, которое равно -7 . Поэтому максимальное значение $f(x)$ равно $2 - (-7) = 9$."

Ваше задание:

1) привести ученикам формулы синуса, косинуса и тангенса для суммы двух аргументов. В случае тангенса $\operatorname{tg}(x + y)$ представьте его через $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$ и укажите множество всех значений аргументов когда справедливо это представление. (4 балла)

2) Объясните ученику, какую ошибку допустил он при решении задачи. (1 балл)

3) Решите задачу и укажите все значения аргумента, при которых функция $f(x)$ принимает максимальное значение. Изложите Ваше решение ясно, на языке понятном для учащихся. (5 баллов)

Около треугольника ABC описана окружность. Точка D является серединой дуги BC а хорда AD пересекает хорду BC в точке K . Найдите длину отрезка AK , если $AC = 21$ см, $BC = 24$ см и $\cos \angle ACB = \frac{11}{14}$.

Задача 33**7 баллов**

Фирма по переработке нефти владеет двумя заводами. Первый завод производит в сутки 100 тонн топлива высокого качества, 300 тонн топлива среднего качества и 400 тонн топлива низкого качества. Второй завод производит в сутки 200 тонн топлива высокого качества, 100 тонн топлива среднего качества и 300 тонн топлива низкого качества. Суточные затраты каждого завода составляют 20000 лари. Сколько дней должен работать каждый из заводов, чтобы фирма с минимальными затратами изготовила не менее 9000 тонн топлива высокого качества, 12000 тонн топлива среднего качества и 26000 тонн топлива низкого качества?