

Тест по математике

Инструкция

Перед Вами электронный буклет экзаменационного теста.

Тест состоит из 33 задач.

Решение задач 31-33 должно быть записано в специально отведенном для них месте на листе ответов. В Вашей записи должен быть четко представлен путь решения задачи.

Учтите, что размеры чертежей, прилагаемых к некоторым задачам, могут не соответствовать указанным в условиях размерам. Поэтому не следует делать выводы о длинах отрезков или других величинах на основании размеров чертежа. Руководствуйтесь условием задачи.

Максимальная оценка теста – 52 балла.

Для выполнения работы Вам отводится 5 часов.

Желаем успеха!



Задача 1**1 балл**

Расположите числа: $16^{-\frac{1}{4}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\frac{7}{16}$ в порядке убывания.

а) $16^{-\frac{1}{4}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{7}{16}$

б) $16^{-\frac{1}{4}}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$

в) $\frac{7}{16}$, $16^{-\frac{1}{4}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$

г) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $16^{-\frac{1}{4}}$, $\frac{7}{16}$

Задача 2**1 балл**

Отношение масс муки, сахара и масла, используемых для выпечки пирога равно $24 : 13 : 3$. Масса испеченного пирога на 20% больше суммарной массы используемых в нем муки, сахара и масла. Сколько граммов сахара понадобится для приготовления пирога массой 1,2кг?

а) 280г

б) 305г

в) 325г

г) 340г

Задача 3**1 балл**

Найдите множество решений уравнения $x\sqrt{5+x} + \sqrt{x^2(5+x)} = 0$.

а) $\{-5; 0\}$

б) $\{-5; 0; 5\}$

в) $(-\infty; 0]$

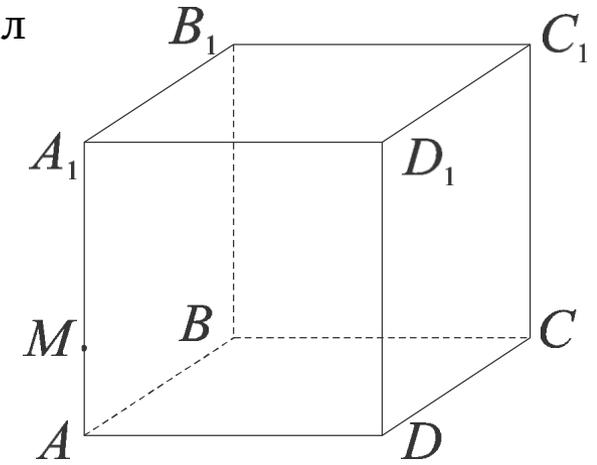
г) $[-5; 0]$

Задача 4

1 балл

На ребре AA_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит точка M (см. рисунок). Найдите угол между прямыми $D_1 M$ и AB .

- а) 45°
- б) 60°
- в) 90°
- г) Для определения угла недостаточно данных



Задача 5**1 балл**

Найдите наибольшее натуральное число, которое для любых четных чисел m и n является делителем числа $4m^2 + 8n^2$.

а) 4

б) 8

в) 16

г) 32

Задача 6**1 балл**

Найдите множество решений неравенства $\lg(2x + 3) < 1$.

а) $\left(-\infty; \frac{7}{2}\right)$

б) $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$

в) $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$

г) $\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$

Задача 7**1 балл**

Если множеством решений неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ является интервал $(3; +\infty)$, то $\frac{a+c}{b} =$

а) -3

б) -1,5

в) 1,5

г) 3

Задача 8

1 балл

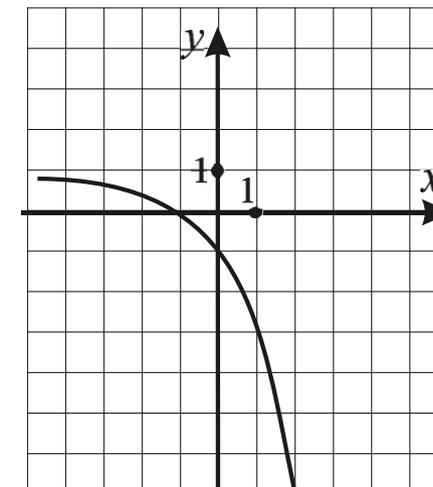
На рисунке изображён график одной из нижеперечисленных функций. Укажите эту функцию.

а) $y = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

б) $y = -x - 1$

в) $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$

г) $y = -2^{x+1} + 1$



Задача 9**1 балл**

Расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника до меньшей стороны в два раза больше, чем от большей стороны. Найдите меньшую сторону прямоугольника, если периметр прямоугольника 30см.

а) 5 см

б) 6 см

в) 7 см

г) 8 см

На множестве натуральных чисел определена операция \diamond следующим образом: для натуральных чисел m и n число $m \diamond n$ равно сумме наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя чисел m и n . Какое из перечисленных ниже высказываний всегда верно?

- а) Операция \diamond коммутативна и ассоциативна.
- б) Операция \diamond коммутативна, но не ассоциативна.
- в) Операция \diamond ассоциативна, но не коммутативна.
- г) Операция \diamond не коммутативна и не ассоциативна.

Задача 11

1 балл

Найдите наибольшее нечетное натуральное число, запись которой в двоичной системе счисления содержит в точности три единицы и два нуля.

- а) тридцать один
- б) двадцать девять
- в) двадцать пять
- г) двадцать один

Задача 12**1 балл**

Известно, что количество элементов в множестве A в n раз больше, чем в множестве B . Объединение множеств A и B состоит из 29 элементов, а пересечение - из 6 элементов. Какое из перечисленных ниже значений может принимать число n ?

а) 4

б) 6

в) 3

г) 5

a и b - обратно пропорциональные положительные величины. Как изменится b , если увеличим a на 60%?

- а) Уменьшится на 40%.
- б) Уменьшится на 37,5%.
- в) Уменьшится на 62,5%.
- г) Увеличится на 60%.

Задача 14**1 балл**

Арифметическая прогрессия состоит из 101 члена. 31-ый член этой прогрессии равен 50, а 41-ый равен 40. В каком из нижеперечисленных интервалов находятся все члены этой прогрессии?

а) $(-107; 66)$ б) $(-75; 70)$ в) $(-23; 82)$ г) $(-18; 103)$

Задача 15**1 балл**

Длины сторон тупоугольного треугольника выражаются в целых числах. Найдите косинус тупого угла, если длины прилежащих сторон этого угла равны 3 см и 4 см.

а) -1

б) $-\frac{11}{24}$

в) $-\frac{5}{12}$

г) $-\frac{13}{24}$

Задача 16**1 балл**

Вероятность попадания стрелка в мишень при каждом выстреле равна $\frac{2}{3}$. Найти вероятность того, что из 10 выстрелов стрелок попадёт в мишень ровно 8 раз.

а) $\frac{10 \cdot 2^8}{3^{10}}$

б) $\frac{5 \cdot 2^9}{3^8}$

в) $\frac{10 \cdot 2^8}{3^8}$

г) $\frac{5 \cdot 2^8}{3^8}$

Задача 17**1 балл**

Равенство $5\sqrt{x^2+1} - 3(x^2+1)^{\frac{3}{2}} = (x^2+1)^k (mx^2+n)$ справедливо для любого действительного числа x , где k , m и n некоторые действительные числа. Найдите $k+m+n$.

а) 5,5

б) 2,5

в) -0,5

г) -3,5

Задача 18**1 балл**

Найти среднюю величину данных: $x; y; 2; 7; 9; 11$, если известно, что их медиана равна 6, а мода единственна и равна 2.

а) $\frac{35}{6}$

б) $\frac{17}{3}$

в) $\frac{37}{6}$

г) 6

Задача 19**1балл**

Какая точка из перечисленных ниже лежит в треугольнике с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(4;5)$ и $B(4;0)$?

а) $P(3; 4,5)$ б) $Q(0; 2,5)$ в) $R(2;1)$ г) $S(1; 2,5)$

Задача 20**1 балл**

Вычислите векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$, если $\vec{a} = (1; -1; 2)$ и $\vec{b} = (1; -3; 5)$.

а) $(-1; 3; 2)$

б) $(1; 3; -2)$

в) $(1; 3; 2)$

г) $(1; -3; -2)$

Задача 21**1 балл**

Пусть S_n - сумма первых n членов последовательности a_n ($n = 1, 2, \dots$). Если для любого n , $n = 2, 3, \dots$, справедливо равенство $4S_n = S_{n+1} + 3S_{n-1}$, то эта последовательность есть

- а) Арифметическая прогрессия.
- б) Геометрическая прогрессия.
- в) Последовательность, состоящая из квадратов членов арифметической прогрессии.
- г) Последовательность, состоящая из кубов членов арифметической прогрессии.

Точка с координатами $(3; 1)$, лежащая на координатной плоскости Oxy , после поворота вокруг начала координат на острый угол α перешла в точку с координатами $(x; 3)$. Найдите величину угла α .

а) $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}$

б) $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}} - \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}$

в) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} - \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}$

г) 30°

Задача 23**1 балл**

Найдите $\arcsin x$, если известно, что $\arccos x = \frac{4}{5}\pi$.

а) $-\frac{4\pi}{5}$

б) $-\frac{3}{10}\pi$

в) $\frac{\pi}{5}$

г) $\frac{2}{5}\pi$

Задача 24**1 балл**

Сколько действительных корней имеет уравнение $z^4 = 1$ в множестве комплексных чисел?

а) один

б) два

в) три

г) четыре

Задача 25**1 балл**

Найдите остаток от деления полинома $x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 8x$ на полином $x + 2$.

а) -16

б) -10

в) $x + 1$ г) $x - 4$

Задача 26**1 балл**

Найдите радиус окружности, заданной уравнением $4x^2 - 4x + 4y^2 + 24y = 63$.

а) 5

б) 10

в) $\sqrt{63}$

г) 63

Задача 27**1 балл**

Найдите абсциссу точки A , лежащей на графике функции $y = x^2 - 4x - 7$, если вектор $\vec{b}(-3; 5)$ является направляющим (параллельным) вектором касательной к графику в этой точке.

а) $-\frac{4}{3}$

б) $\frac{7}{6}$

в) $\frac{1}{2}$

г) $\frac{9}{2}$

Задача 28**1 балл**

$$\int_0^{\ln 2} x e^x dx =$$

а) 2

б) $2 \ln 2$

в) $2 \ln 2 - 2$

г) $2 \ln 2 - 1$

Задача 29**1 балл**

Найдите численное значение параметра k , при котором функция $f(x) = \begin{cases} 3kx + 2, & x < 2 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 2 \end{cases}$

непрерывна в точке $x = 2$.

а) $-\frac{1}{4}$

б) $\frac{4}{5}$

в) 0

г) Такого значения не существует.

Задача 30**1 балл**

Боковые грани правильной четырехугольной пирамиды равносторонние треугольники. Найдите величину угла между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

а) 30° б) 45° в) 60° г) 75°

Вы планируете рассмотреть с учениками тему «Элементы комбинаторики и связанные с ними задачи». В связи с этим выполните следующие задания:

- 1) Приведите определение перестановки и формулу вычисления количества перестановок посредством факториалов. (2 балла)
- 2) Приведите определение сочетания и формулу вычисления числа сочетаний посредством факториалов. (2 балла)
- 3) Приведите определение размещения и формулу вычисления числа размещений посредством факториалов. (2 балла)
- 4) Докажите равенства
 - а) $C_n^m = C_n^{n-m}$;
 - б) $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$;(2 балла)
- 5) Число A является произведением 20 отличных друг от друга простых чисел. Чему равно количество тех натуральных делителей числа A , которые в свою очередь имеют в точности 8 натуральных делителей? Изложите своё решение ясно и понятно для учашихся. (2 балла)

Задача 32**5 баллов**

Хорда, длина которой равна радиусу, делит круг на две части. Найдите площадь меньшей части круга, если площадь большей части равна S .

Функция f определена равенством $f(x) = \sqrt{1-2x}$.

- Найдите область определения и множество значений функции f .
- Найдите множество всех тех значений x , для которых выражение $f(f(x))$ имеет смысл.
- Найдите множество значений функции $f(f(x))$.