2020 - 2021 სასწავლო წლის ეროვნული ოლიმპიადა მათემატიკაში

III ტური

X კლასი

ამოცანა 1 5 ქულა

რა უმცირესი მნიშვნელობა შეუძლია მიიღოს $x+y+z$ გამოსახულებამ, თუ x, y და z არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვებია და ისინი აკმაყოფილებენ ტოლობას

$$4^{\sqrt{7x+9y+4z}}+128=36\cdot 2^{\sqrt{7x+9y+4z}} ?$$

ამოცანა 2 5 ქულა

იპოვეთ

$$\frac{x-[x]}{2021}=\frac{[x]}{2020x}$$

განტოლების ყველა დადებითი ამონახსნი ($[x]$ სიმბოლოთი აღნიშნულია უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება x -ს).

ამოცანა 3 5 ქულა

ABC სამკუთხედის AC და BC გვერდებზე სამკუთხედის გარე მხრიდან აგებულია $ACDE$ და $BOKC$ კვადრატები. M წერტილი წარმოადგენს AB მონაკვეთის შუაწერტილს. F და Q შესაბამისად $ACDE$ და $BOKC$ კვადრატების დიაგონალების გადაკვეთის წერტილებია. CM წრფე კვეთს FQ მონაკვეთს L წერტილში. ცნობილია, რომ $FL=LQ$. აჩვენეთ, რომ $AC=CB$.

ამოცანა 4 5 ქულა

მოცემულია რიცხვითი მიმდევრობა რეკურენტული წესით: $a_1=1,\ a_2=2$ და ყოველი $n\geq 1$ ნატურალური რიცხვისათვის $a_{n+2}=5a_{n+1}-3a_n$, თუ $a_n a_{n+1}$ რიცხვი ლუწია და $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$, თუ $a_n a_{n+1}$ კენტია (ვიგულისხმოთ, რომ ლუწი და კენტი რიცხვები შესაბამისად $2k$ და $2k+1$ სახის რიცხვებია, სადაც k მთელი რიცხვია). აჩვენეთ, რომ არ არსებობს მიმდევრობის წევრი, რომელსაც ექნება $4k$ სახე, სადაც k რაიმე მთელი რიცხვია.

ამოცანა 5 5 ქულა

ABC ტოლფერდა სამკუთხედიში, სადაც $AC=CB$, ჩახაზულია წრეწირი, რომელიც AC, CB და AB გვერდებს ეხება შესაბამისად B_1, A_1 და C_1 წერტილებში. სამკუთხედის C წვეროდან დაშვებული სიმაღლე წრეწირს კვეთს K წერტილში, ამასთან $K\neq C_1$. D წერტილი C_1B_1 და A_1K წრფეების გადაკვეთის წერტილია. ცნობილია, რომ CD მონაკვეთის სიგრძე ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსის ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ ABC სამკუთხედი მართკუთხაა.