2020 - 2021 სასწავლო წლის ეროვნული ოლიმპიადა მათემატიკაში

III ტური

XI-XII კლასი

ამოცანა 1 — 5 ქულა

იპოვეთ მთელი რიცხვების ყველა (x, y, z) სამეული , რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას $x^2 + y^4 = 6^z - 1$.

ამოცანა 2 — 5 ქულა

იპოვეთ ისეთი უდიდესი ნამდვილი M რიცხვი, რომ $a^2 + b^2 + c^2 + 3abc \geq M(ab + bc + ac)$ უტოლობა შესრულდეს ყოველი a, b და c არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვებისთვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ $a + b + c = 4$ პირობას.

ამოცანა 3 — 5 ქულა

ABC მახვილკუთხა სამკუთხედში გავლებულია BB_1 და CC_1 სიმაღლეები. BB_1 და CC_1 წრფეებზე აღებულია შესაბამისად E და F წერტილები ისე, რომ B_1 მდებარეობს B და E წერტილებს შორის, C_1 მდებარეობს C და F წერტილებს შორის და $\angle EAF = 90^\circ$. ვთქვათ AM არის AEF სამკუთხედის სიმაღლე. დაამტკიცეთ, რომ $\angle BMC = 90^\circ$.

---

5 ქულა

ამოცანა 4

ვთქვათ M არის ABC სამკუთხედის AC გვერდის შუაწერტილი. AM და CM მონაკვეთებზე შესაბამისად არჩეულია X და Y წერტილები ისე, რომ $AC = 2XY$. ABY სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი BC გვერდს კვეთს E წერტილში $(E \neq B)$, ხოლო BCX სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი AB გვერდს კვეთს F წერტილში $(F \neq B)$. დაამტკიცეთ, რომ $BEMF$ ოთხკუთხედზე შემოიხაზება წრეწირი.

ამოცანა 5 — 5 ქულა

მოცემულია სიმრავლე $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2020\}$. რამდენი განსხვავებული გზით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ A სიმრავლე ორი ისეთი თანაუკვეთი სიმრავლის გაერთიანების სახით, რომ არცერთი მათგანი არ შეიცავდეს ორ განსხვავებულ რიცხვს, რომელთა ჯამი იქნება 2^k სახის, სადაც k ნატურალური რიცხვია. (შენიშვნა: $A = B \cup C$ და $A = C \cup B$ წარმოდგენები ითვლება ერთ წარმოდგენად)